Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09
21.1.2009

10. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 33 (3 Punkte)

Immer wenn Soziologe S. Psychologe P. besuchen will muss er einmal umsteigen. Sein Bus kommt rein zufällig (gleichverteilt) zwischen 8:07 Uhr und 8:14 Uhr am Bahnhof an. Die Regionalbahn zu Psychologe P. bekommt er aber nur, wenn er pünktlich bis 8:10 am Bahnhof ist. Kommt er jedoch zu spät, so muss er ein Taxi nehmen und somit anstatt 6 Euro für eine Zugfahrkarte 31 Euro für das Taxi zahlen. Sei Z die reelle Zufallsvariable, welche die zufälligen Fahrtkosten beschreibt. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Zufallsvariable.

Lösung: Wir modellieren die Kosten beim zufälligen Eintreffen mit der Kostenfunktion

$$h(x) = \begin{cases} 6 & , 7 \leq x < 10, \\ 31 & , 10 \leq x \leq 14, \\ 0 & , sonst. \end{cases}$$

womit wir den Erwartungswert berechnen können mit:

$$\begin{aligned} Eh(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(X) f(x) dx \\ &= \int_{7}^{14} h(X) f(x) dx \\ &= \int_{7}^{10} 6 \cdot \frac{1}{7} dx + \int_{10}^{14} 31 \frac{1}{7} dx \\ &= \frac{6}{7} [x]_{7}^{10} + \frac{31}{7} [x]_{10}^{14} \\ &= \frac{6 \cdot 3 + 31 \cdot 4}{7} \\ &= \frac{142}{7} \\ &= 20,29 \end{aligned}$$

Um die Varianz ausrechnen zu können müssen wir noch $E(h(X)^2)$ berechnen mit 152,89

$$
\begin{aligned}
E(h(X)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(X)^2 f(x) dx \\
&= \int_{7}^{10} 6^2 \cdot \frac{1}{7} dx + \int_{10}^{14} 31^2 \frac{1}{7} dx \\
&= \frac{36}{7} [x]_7^{10} + \frac{961}{7} [x]_{10}^{14} \\
&= \frac{36 \cdot 3 + 961 \cdot 4}{7} \\
&= \frac{3952}{7} \\
&= 564,57
\end{aligned}
$$

womit wir insgesamt

$$
\begin{aligned}
V(h(X)) &= E(h(X)^2) - (Eh(X))^2 \\
&= 564,57 - 411,68 \\
&= 152,89
\end{aligned}
$$

gilt.

Aufgabe 34 (3 Punkte)

Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit Dichte

$$
f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung: Der Erwartungswert ist

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{0}^{1} x 6x(1-x) dx \\
&= \int_{0}^{1} 6x^2 dx - \int_{0}^{1} 6x^3 dx \\
&= \frac{1}{3} 6 - \frac{1}{4} 6 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_0^1 6x^3dx - \int_0^1 6x^4dx \\
&= \frac{6}{4} - \frac{6}{5} \\
&= \frac{30-24}{20} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

womit die Varianz

$$
\begin{aligned}
VX &= (EX)^2 - EX^2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \\
&= \frac{40-12}{40} \\
&= \frac{7}{10}
\end{aligned}
$$

ist.

Aufgabe 35 (3 Punkte)

Pädagoge G. liest, dass bei IQ-Tests meist eine Normalverteilung mit Parametern $\mu = 100$ und $\sigma = 15$ genutzt wird um eine Leistungsskala zu konstruieren. Seien X und Y nun zwei unabhängige normalverteile Zufallsvariablen mit parametern μ und σ. Berechnen Sie die folgenden Werte:

a) $E(X)$, $E(2 \cdot Y)$, $E(X+Y)$, $E(X+X)$, $E(Y \cdot X)$

b) $E(|X - EX|^2)$, $V(X)$, $E(X^2) - (E(Y))^2$

c) $V(\sqrt{5} \cdot X + 2 \cdot Y + \pi)$

Lösung:

(a) $E(X) = E(Y) = \mu$ nach definition. $E(2Y) = 2E(Y)$. $E(X+Y) = EX + EY$. $E(X+X) = E(2X) = E(2Y)$. $E(Y \cdot X) = EX \cdot EY$ dann und nur dann, wenn X und Y unabhängig sind.

(b) $E(|X - EX|^2) = E(X^2) - (E(Y))^2 = V(X) = \sigma^2$.

(c)

$$
\begin{aligned}
V(\sqrt{5} \cdot X + 2 \cdot Y + \pi) &= V(\sqrt{5} \cdot X + 2 \cdot Y) \\
&= V(\sqrt{5} \cdot X + 2 \cdot Y) \\
&\overset{X\,Y\,unabh.}{=} V(\sqrt{5} \cdot X) + V(2 \cdot Y) \\
&= 5V(X) + 4V(Y) \\
&= 9\sigma^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 36 (3 Punkte)

An einem Flughafen wird für das Abstellen eines Autos für x Minuten die Gebühr

$$h(x) = \begin{cases} 10 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 60, \\ \frac{x}{6} & \text{für} \quad 60 < x < 600, \\ 800 & \text{für} \quad x \geq 600, \end{cases}$$

verlangt. (Im Falle $x \geq 600$ wird das Auto abgeschleppt.)
Student S. holt seine Oma vom Flughafen ab. Dazu fährt er exakt zur geplanten Ankunftszeit des Flugzeugs in den Parkplatz ein. Leider hat das Flugzeug X Minuten Verspätung, wobei X eine $\exp(\lambda)$–verteilte ZV ist. Daher erreicht er die Parkaufsicht, bei der er die Gebühren bezahlen muss, erst wieder nach $X + 30$ Minuten.
Wie groß ist im Mittel die Gebühr, die Student W. bezahlen muss ?
Hinweis: Berechnet werden soll

$$E(h(X + 30)),$$

wobei X eine $\exp(\lambda)$–verteilte ZV ist, d.h. X ist eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Es gilt:

$$\int_a^b x \cdot e^{-\lambda x} dx = \left[x \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} dx.$$

Lösung: Es gilt

$$\int_a^b e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right]_a^b$$

und

$$\int_a^b x \cdot e^{-\lambda x} dx = \left[x \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} dx$$

womit

$$\begin{aligned}
Eh(X + 30) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x + 30) \cdot f(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} h(x + 30) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \cdot \left(\int_0^{30} 10 \cdot e^{-\lambda x} dx + \int_{30}^{570} \frac{x + 30}{6} \cdot e^{-\lambda x} dx + \int_{570}^{\infty} 800 \cdot e^{-\lambda x} dx \right) \\
&= \lambda \cdot \left(10 \cdot \int_0^{30} e dx + \frac{1}{6} \int_{30}^{570} x \cdot e^{-\lambda x} dx + 5 \int_{30}^{570} e^{-\lambda x} dx + 800 \int_{570}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right) \\
&= 10 \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{30} + 5 \left[-e^{-\lambda x} \right]_{30}^{570} + 800 \left[-e^{-\lambda x} \right]_{570}^{\infty} + \frac{1}{6} \left[-x \cdot e^{-\lambda x} \right]_{30}^{570} + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{30}^{570}
\end{aligned}$$

gilt.

Abgabe der Übung: Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.