Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09
18. Dezember 2008

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Lösung zur Aufgabe 30 (3 Punkte)

Wir berechnen den Erwartungswert wie in der Vorlesung mit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= [-xe^{-\lambda x}]_0^\infty - \lambda \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\ &= [-xe^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty \\ &= 0 - (-\frac{1}{\lambda}) \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

womit wir, um obige Frage zu beantworten, $\lambda = \frac{1}{5}$ wählen.

Lösung zur Aufgabe 31 (3 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0dx + \int_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{2-1}dx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot xdx \\
&= \int_{1}^{2} xdx = \frac{1}{2}x^2\bigg|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\mathbf{V}X &= \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)^2\right) = \mathbf{E}\left(\left(X - \frac{3}{2}\right)^2\right) \\
&= \int_{1}^{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1dx = \int_{1}^{2} x^2dx - 3\int_{1}^{2} xdx + \frac{9}{4}\int_{1}^{2} dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\bigg|_{x=1}^{2} - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2\bigg|_{x=1}^{2} + \frac{9}{4}\, x|_{x=1}^{2} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 3 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{4}(2-1) = \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} \\
&= \frac{28 - 54 + 27}{12} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(b)

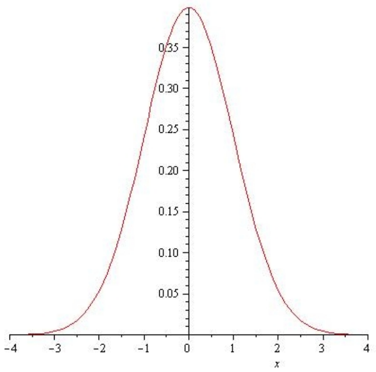
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y^2\right) &= \cdots = \int_{2}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{4-2}dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3\bigg|_{x=2}^{4} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

(c)

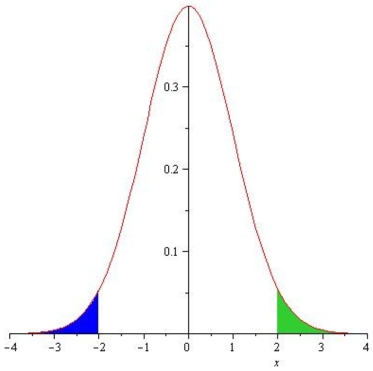
$$\mathbf{E}\left(2X + 3Y^2\right) = 2\mathbf{E}X + 3\mathbf{E}\left(Y^2\right) = 3 + 28 = 31$$

Lösung zur Aufgabe 32 (3 Punkte)

(a) Die Funktion hat eine Extremstelle bei $x = 0$ und Wendestellen bei $x = 1$ und $x = -1$. Da die Exponentialfunktion nicht negativ ist, gilt dies auch für f. Außerdem ist die Funktion Achsensymmetrisch zur y-Achse.



(b) In der folgenden Abbildung sind Flächen grün bzw. blau markiert. Da der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse ist, sind die beiden Flächen gleich groß. Da die Standardnormalverteilung ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss die Fläche zwischen Graph und x-Achse insgesamt 1 sein. Die Fläche des nicht grün markierten Teils ist demnach so groß, wie 1− Fläche des grün markierten Teils.



(c) i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\} = \Phi(0.4) = 0.655$

ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\} = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.758 = 0.242$

iii. $\mathbf{P}\{0.1 \leq X < 0.2\} = \Phi(0.2) - \Phi(0.1) = 0.579 - 0.54 = 0.039$