Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
18. Dezember 2008

9. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Psychologe M. untersucht Mütter, die nach der Geburt ihres Kindes eine psychologische Behandlung beginnen, weil sie an einer psychologischen Störung leiden. Aus Erfahrung weiß er, dass eine solche Behandlung im Mittel 5 Monate nach der Geburt begonnen wird. Um die Zeit bis zum Beginn der Behandlung (in Monaten) stochastisch zu modellieren, beschließt er dazu eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

zu verwenden, wobei $\lambda \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ (= die positiven reellen Zahlen ohne die Null) ein noch zu bestimmender Parameter der Dichte ist.
Wie muss er λ wählen, dass bei einer Zufallsvariable mit Dichte f der Erwartungswert gerade 5 ist?

Hinweis Verwenden Sie, dass

$$F(x) = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{-\lambda x}$ ist.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Sei X eine auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) Sei Y eine auf dem Intervall $[2, 4]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y^2.

(c) Bestimmen Sie den Erwrtungswert von $2X + 3Y^2$, wobei X und Y wie in den Aufgabenteilen (a) bzw. (b) definiert sind.

Hinweis Die Varianz einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)^2\right).$$

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Der Funktionswert von Φ an der Stelle x ist also die Fläche zwischen der Funktion $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

In der folgenden Tabelle sind einige Funktionswerte der Standardnormalverteilung abgebildet.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\Phi(x)$	0.5	0.54	0.579	0.618	0.655	0.692	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841

(a) Skizzieren Sie qualitativ die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

für $t \in [-4, 4]$.

(b) Begründen Sie Anhand der Skizze aus Teil (a), dass gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

(c) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, d.h. eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion Φ. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\}$

ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\}$

iii. $\mathbf{P}\{0.1 < X \leq 0.2\}$