Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dipl.-Math. Andreas Fromkorth
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09
17.12.2008

# 8. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft"

**Aufgabe 26** (3 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein W–Maß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.

(a) Welche Beziehung muss zwischen $\alpha$ und $\beta$ bestehen, damit $f$ wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu $f$ gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

definierte Funktion $F$.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $f$ und $F$ für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

(d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern $f$ wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.

i. weniger als zwei Minuten zu früh kommt?

ii. mehr als zehn Minuten zu früh kommt?

**Lösung:**

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

(a) $f$ Dichte $\Rightarrow$ es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \overset{!}{=} 1$
Somit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx}_{=0} \\ &= \int_{0}^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2}\beta\alpha^2 - 0 \quad \overset{!}{=} 1\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist $\alpha$ als positiv vorausgesetzt.)

(b) Für $t < 0$ ist $f(t) = 0$ und somit gilt für $x < 0$:

$$\int_{-\infty} xf(t)dt = \int_{-\infty} x0dt = 0.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ erhalten wir

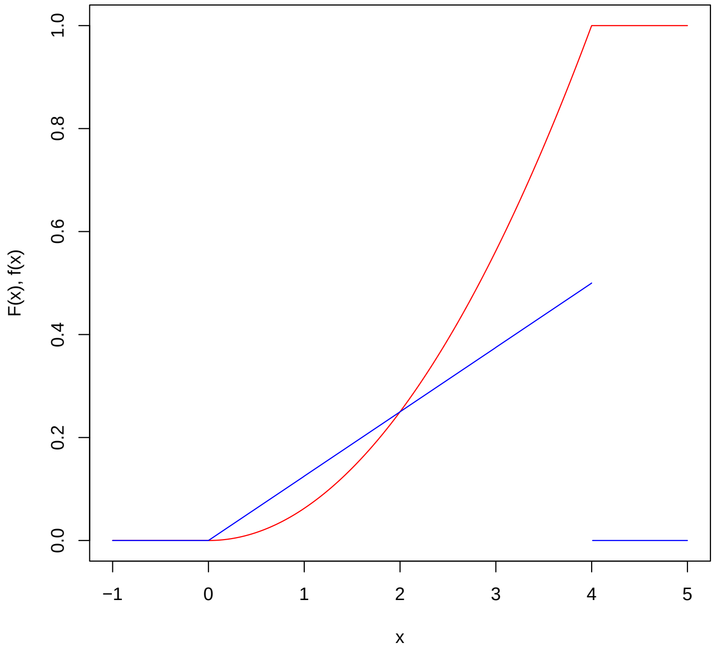
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \beta t dt = \int_{0}^{x} 4dt = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{x} = \frac{1}{16}x^2.$$

Bleibt noch der Fall $x > 4$. Hier gilt

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{16}4^2 + 0 = 1.$$

Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$




(c)

(d) Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

i.

$$
\begin{aligned}
P(X < 2) &= \int_0^2 \frac{1}{8} x dx \\
&= \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\
&= 1 - \int_0^4 \frac{1}{8} x dx \\
&= 1 - \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 27** (3 Punkte)

Sie und ihr Freund werfen je einen fairen Würfel. Derjenige, der die kleinere Zahl wirft, zahlt an den anderen so viele Geldeinheiten, wie die Differenz der Augenzahl beträgt. Die Zufallsvariable $X$ beschreibt Ihren Gewinn, wobei ein negativer Gewinn für Verlust steht.

a) Was sind die Werte, die $X$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt? Bestimmen Sie für jeden dieser Werte die Wahrscheinlichkeit, mit der er angenommen wird.

b) Wie groß ist Ihr Gewinn im Mittel?
Berechnen Sie zur zur Beantwortung dieser Frage den Erwartungswert von X.

**Lösung:**

a) Wir haben $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : i \in \{1, 2\}, \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$ und $X(\omega = (\omega_1, \omega_2)) \in \{-5, \ldots, 5\}$ und es gilt $X(\omega) = \omega_1 - \omega_2$.

$P[X=-5] = P[\{(1,6)\}] = \frac{1}{36}$, $P[X=-4] = \frac{2}{36}$, $P[X=-3] = \frac{3}{36}$, $P[X=-2] = \frac{4}{36}$, $P[X=-1] = \frac{5}{36}$, $P[X=0] = \frac{6}{36}$, $P[X=5] = P[\{(1,6)\}] = \frac{1}{36}$, $P[X=4] = \frac{2}{36}$, $P[X=3] = \frac{3}{36}$, $P[X=2] = \frac{4}{36}$, $P[X=1] = \frac{5}{36}$.

b) Der Erwartungwert ist

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{11} x_k \cdot P[X=x_k] \\ &= \sum_{k=1}^{5} x_k \cdot P[X=x_k] + 0 \cdot P[X=0] + \sum_{k=7}^{11} x_k \cdot P[X=x_k] \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen $\sum_{k=1}^{5} x_k \cdot P[X=x_k] = -\sum_{k=7}^{11} x_k \cdot P[X=x_k]$. Der Gewinn im Mittel ist 0€.

**Aufgabe 28** (3 Punkte)

Ein Student, der keine Zeit hat, sich auf einen 20-Fragen-Multiple-Choice-Test vorzubereiten, beschließt, bei jeder Frage aufs Geratewohl zu raten. Dabei besitzt jede Frage fünf Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $X$, die die Anzahl der richtigen Antworten angibt.

b) Wieviel Fragen wird der Student im Mittel richtig beantworten?

c) Der Test gilt als bestanden, wenn $k$ Fragen richtig beantwortet werden. Wie groß darf $k \in \{0, \ldots, 20\}$ höchstens sein, damit der Student durch das oben beschriebene Raten die Klausur in höchstens 5% der Fälle besteht?

**Lösung:**

a) Die Zufallsvariable $X$ ist binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{5}$ für den Erfolg bei $k$ Fragen.

$$P_X[k] = \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}$$

b) $EX = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{5} = 4.$

c) Es muss gelten $P[X \geq k] \leq \frac{5}{100}$ und damit $P[X \geq k] = 1 - P[X < k]$ womit gelten muss, dass $P[X < k] \geq \frac{95}{100}$ sein muss (somit kann man sich aussuchen, was leider zu berechnen ist $P[X \geq k] = \sum_{i=k}^{20} P[X = k]$ oder $P[X < k] = \sum_{i=0}^{k-1} P[X = k]$). Wegen $P[X < 7] = 0.9133075$ und $P[X < 8] = 0.9678573$ muss $k = 8$ sein, da bei $k = 7$ schon mehr als 8% bei reinem Raten bestehen würden und bei $k = 8$ nurnoch etwas über 3%.

**Aufgabe 29** (3 Punkte)

Berechnen Sie für die Zufallsvariable $X$ in Aufgabe 27 den Wert $E[X^2]$. Stimmt $E[X^2]$ hier mit dem Wert $E[X]^2$ überein?

**Lösung:** Nach der Formel aus der Vorlesung gilt $Eh(X) = \sum_{k=1}^{6} h(x_k) \cdot P[X = x_k]$ mit $h(x) = x^2$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \cdot P[X = x_k] \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^{5} x_k^2 \cdot P[X = x_k] \\
&= 2 \cdot \left(1 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + 25 \cdot \frac{1}{36}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{5 + 16 + 27 + 32 + 25}{36} \\
&= \frac{105}{36}
\end{aligned}$$

Alternativ:

Wir setzen die neue Zufallsvariable $Y := X^2$ und berechnen dazu $EY$ nach der bekannten Formel aus der Vorlesung. Da $X(\omega) \in \{-5, \ldots, 5\}$ ist gilt $Y(\omega) \in \{(-5)^2, \ldots, 5^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Jetzt müssen wir noch die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P[Y = k]$ für $k \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ ausrechen. Wegen $0 = X = X^2$ gilt $P[X = 0] = P[X^2 = 0] = \frac{6}{36}$ und wegen $1 = (-1)^2 = 1^2$

gilt $P[X^2 = 1] = P[X = 1] + P[X = -1] = \frac{10}{36}$. Analog gilt $P[X^2 = 2] = \frac{8}{36}$, $P[X^2 = 3] = \frac{6}{36}$, $P[X^2 = 4] = \frac{4}{36}$ und $P[X^2 = 5] = \frac{2}{36}$. Damit bekommen wir für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
EY =& \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot P[Y = y_i] \\
=& 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} \\
=& \frac{10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} \\
=& \frac{70}{36} \\
=& \frac{25}{18}
\end{aligned}$$

Letztere Frage ist mit nein zu beantworten, da $EY = E[X^2] = \frac{25}{18} \neq (EX)^2 = 0$.

**Abgabe der Übung:** Eine Woche nachdem das Übungsblatt zu Ihrem Übungstermin bearbeitet wurde, zu Beginn der nächsten Übung bei Ihrer Übungsgruppenleiterin oder bei Ihrem Übungsgruppenleiter.