Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
26. Februar 2009

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Lösung zur Aufgabe 23 (3 Punkte)

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.7 + 0.6 - 0.4) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Lösung zur Aufgabe 24 (3 Punkte)

(a) Als Grundmenge haben wir $\Omega = \{(x_1, x_2, x_2) : x_i \in \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, 2, 3\}\}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Menge $A \subset \Omega$ ist gegeben durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{10^3} = \frac{|A|}{1000}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Versuch die richtige Kombination zu treffen, ist also $\frac{1}{1000}$.

(b) Für $k = 1$ wurde dies schon im ersten Aufgabenteil beantwortet. Sei deshalb $k > 1$. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer. Gesucht ist somit $P(X = k)$. Es gilt:

$$P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{1000}$$

(c) Zwei Studen haben $2 \cdot 60 \cdot 60 = 7200$ Sekunden. Somit hat Student S höchstens $\frac{7200}{15} = 480$ Versuche. Mit den Bezeichnungen aus dem letzten Aufgabenteil ist also $P(X \leq 480)$ gesucht.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 480) &= \sum_{k=1}^{480} P(X = k) = \sum_{k=1}^{480} \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{1000} \\
&= \frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=1}^{480} \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{k-1} = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=0}^{479} \left(\frac{999}{1000}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{480}}{1 - \frac{999}{1000}} = 1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{480} \\
&= 0.38
\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 25 (3 Punkte)

(a) Da die Grundmenge vorgegeben ist, muss nur noch die Wahrscheinlichkeit für Teilmengen von Ω angegeben werden. Man kann davon ausgehen, dass alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Es handelt sich also um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum. Demnsch gilt für $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A}{37}.$$

(b) Die zu definierende Zufallsvariable X soll den Wert 1 haben, falls eine rote Zahl gewählt wird, -1 für eine schwarze Zahl und $-\frac{1}{2}$ für die Null. Formal heißt das:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,11,13,15,17,20,22,24,26,28,29,31,33,35\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

(c)

$$P(X < 0) = P(X = -1) + P(X = -\frac{1}{2}) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$$

Lösung zur Aufgabe 26 (3 Punkte)

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

(a) f Dichte $\Rightarrow$ es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \overset{!}{=} 1$
Somit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx}_{=0} \\ &= \int_{0}^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2}\beta\alpha^2 - 0 \quad \overset{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist α als positiv vorausgesetzt.)

(b) Für $t < 0$ ist $f(t) = 0$ und somit gilt für $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ erhalten wir

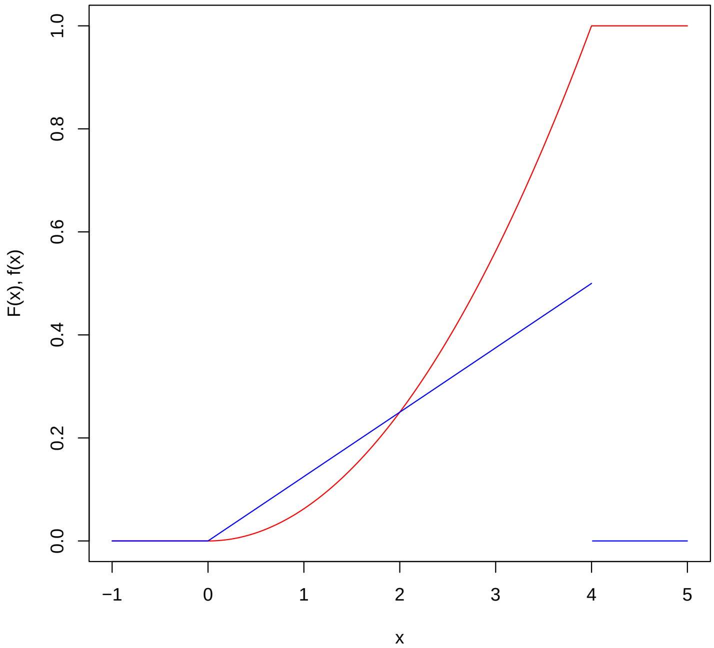
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \beta t dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{8} t dt = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} t^2\right]_{t=0}^{x} = \frac{1}{16}x^2.$$

Bleibt noch der Fall $x > 4$. Hier gilt

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{16}4^2 + 0 = 1.$$

Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$



(c)

(d) Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

i.

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \int_0^2 \frac{1}{8} x dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - \int_0^4 \frac{1}{8} x dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00 \end{aligned}$$