Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09
27. November 2008

7. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Aufgabe 23 (3 Punkte)

Da demnächst Weihnachten vor der Tür steht, macht sich Student S. Gedanken um die Geschenke, die er für seine Eltern kaufen möchte. Aus Erfahrung weiß er, dass er mit Wahrscheinlichkeit 0.7 mit dem Geschenk für seinen Vater und mit Wahrscheinlichkeit 0.6 mit dem Geschenk für seine Mutter richtig liegt. Die Wahrscheinlichkeit, bei beiden richtig zu liegen liegt bei 0.4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichekeit, dass Student S. keines der beiden Geschenke passend auswählt.

Aufgabe 24 (3 Punkte)

Student S. hat die Zahlenkombination des Schlosses seines Koffers vergessen. Damit sich das Schloss öffnen lässt, müssen drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ jeweils richtig eingegeben werden.
Student S. versucht, das Schloss durch sukzessives Ausprobieren von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ zu öffnen. Da er ein schlechtes Gedächtnis hat, kann er sich die bisher eingegebenen Ziffernfolgen nicht merken, so dass er unter Umständen mehrmals die gleiche Ziffernfolge eingibt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Raten *einer* Ziffernfolge bestehend aus drei Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ die richtige Ziffernkombination zu erhalten?

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. genau bei der k–ten Eingabe einer Ziffernfolge zum ersten Mal die richtige Ziffernkombination eingibt? *Hinweis:* Betrachten Sie das k–malige Werfen eines Würfels mit 1000 Seiten, die mit den Zahlen 1 bis 1000 beschriftet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel beim k–ten Wurf zum ersten Mal mit 1 oben landet?

(c) Wie oben beschrieben versucht Student S. nun, dass Schloss durch sukzessive Eingabe von rein zufällig gewählten Ziffernfolgen zu öffnen. Für das Einstellen einer Ziffernfolge und das Probieren, ob sich das Schloss öffnet, benötigt Student S. 15 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. das Schloss innerhalb von zwei Stunden öffnen kann?

Hinweis: Für $q \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{N} q^i = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Beim Roulettespiel wird zufällig eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ ausgewählt. Dabei sind die Zahlen zusätzliche mit Farben markiert: Die Null ist grün, die Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35$$

sind schwarz und die restlichen Rot. Wir betrachten die Spielstrategie: Setzen auf Rot. Gewinnen wir (d.h. eine rote Zahl wird ausgewählt) erhalten wir den doppelten Einsatz. Wird eine schwarze Zahl gewählt, verlieren wir das eingesetzte Geld. Im Falle der Null existieren verschiedene Spielarten. Wir gehen hier davon aus, dass man die Hälfte des Einsatzes verliert.

(a) Definieren Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments einen Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$.

(b) Definieren Sie mit der Grundmenge aus Teil (a) eine Zufallsvariable X, die den Gewinn (bzw. Verlust) für den Einsatz von einer Geldeinheit auf Rot modelliert.

(c) Berechnen Sie für die Zufallsvariabel X aus Aufgabenteil (b) die Wahrscheinlichkeit

$$P(X < 0).$$

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Student S. vermutet, dass die zufällige Zeit (in Minuten), die Dozent K. bei seiner Statistik Vorlesung immer zu früh kommt, durch ein W–Maß beschrieben wird, dass eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

besitzt. Hierbei sind $\alpha, \beta > 0$ Parameter der Dichte.

(a) Welche Beziehung muss zwischen α und β bestehen, damit f wirklich Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$ die zu f gehörende Verteilungsfunktion, d.h. die durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

definierte Funktion F.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f und F für $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

(d) Sei wieder $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$. Wie groß ist – sofern f wirklich die zufällige Zeit beschreibt, die Dozent K. zu früh kommt – die Wahrscheinlichkeit, dass Dozent K.

i. weniger als zwei Minuten zu früh kommt?

ii. mehr als zehn Minuten zu früh kommt?