Fachbereich Mathematik
M. Kohler
A. Fromkorth
J. Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09
15. Dezember 2008

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt zur „Statistik I für Human- und Sozialwissenschaft“

Lösung zur Aufgabe 19 (3 Punkte)

(a) Nein, da man das Experiment nicht beliebig oft wiederholen kann.

(b) Da es sich bei $\{z, w\}$ um eine Teilmenge der Grundmenge handelt, ist es ein Ereignis. Es ist aber kein Elementarereignis, da die Menge mehr als ein Element enthält.

(c) Für die absolute Häufigkeit erhalten wir $22 + 17 = 39$. Die relative Häufigkeit ist $\frac{39}{100}$.

(d) Eine solche Teilmenge kann es nicht geben. Denn für eine beliebige Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(\Omega) = 1.$$

Lösung zur Aufgabe 20 (3 Punkte)

3 Spieler jeweils einen Hut. Farbe vom Hut entweder rot oder blau (mit gleicher Wk. $p = 0.5$).

Laplacescher W-Raum (Ω, P) mit
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{r, b\} (i = 1, 2, 3)\}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

(a) Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn einer der drei immer rot tippt und andere passen:

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{4}{|\Omega|} = \frac{4}{2^3} = 0.5 \mathrel{\hat{=}} 50\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler
r	r	r
r	r	b
r	b	r
b	r	r
r	b	b
b	r	b
b	b	r
b	b	b

Z.B. 1. Spieler hat 4 Möglichkeiten rot bzw. blau zu wählen $\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten = 4.

(b) Gesucht: Wk., einen Preis zu gewinnen, wenn nur derjenige einen Tipp abgibt, der bei Mitspielern dieselbe Farbe sieht (Ist dies rot, so tippt er auf blau):

$$\frac{\text{Anz. günstiger Fälle}}{\text{Anz. möglicher Fälle}} = \frac{6}{|\Omega|} = \frac{6}{2^3} = 0.75 \mathrel{\hat{=}} 75\%$$

mit Anzahl günstiger Fälle anschaulich:

1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler	1. Sp. tippt	2. Sp. tippt	3. Sp. tippt	Team gewinnt
r	r	r	b	b	b	NEIN
r	r	b	-	-	b	JA
r	b	r	-	b	-	JA
b	r	r	b	-	-	JA
r	b	b	r	-	-	JA
b	r	b	-	r	-	JA
b	b	r	-	-	r	JA
b	b	b	r	r	r	NEIN

Lösung zur Aufgabe 21 (3 Punkte)

Entsprechend den Angaben aus der Aufgabenstellung lässt sich die 12 durch folgende Kombinationen darstellen: $6-5-1$, $6-4-2$, $6-3-3$, $5-5-2$, $5-4-3$, $4-4-4$.
Betrachte als Grundmenge

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3):\ \text{für } i = 1,2,3 \text{ gilt: Würfel } i \text{ zeigt } w_i\}\,.$$

D.h. wir gehen zunächst davon aus, dass die Würfel unterscheidbar sind (z.B. unterschiedliche Farbe haben). Aus Symmetriegründen können wir dann annehmen, dass die Elementarereignisse aus Ω alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, dass es sich also um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitraum handelt. Für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt demnach

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6^3} = \frac{|A|}{216}.$$

Wir müssen also die folgenden beiden Ereignisse betrachten:

$$\begin{aligned} A &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_1 + w_2 + w_3 = 11\} \\ &= \{(6,4,1), (4,1,6), (1,6,4), (4,6,1), (1,4,6), (6,1,4), \\ &\quad (6,3,2), (3,2,6), (2,6,3), (3,6,2), (2,3,6), (6,2,3), \\ &\quad (5,5,1), (1,5,5), (5,1,5), \\ &\quad (5,4,2), (4,2,5), (2,5,4), (4,5,2), (2,4,5), (5,2,4), \\ &\quad (5,3,3), (3,3,5), (3,5,3), \\ &\quad (4,4,3), (4,3,4), (3,4,4), \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_1 + w_2 + w_3 = 12\} \\ &= \{(6,5,1),(5,1,6),(1,6,5),(5,6,1),(1,5,6),(6,1,5), \\ &\quad (6,4,2),(4,2,6),(2,6,4),(4,6,2),(2,4,6),(6,2,4), \\ &\quad (6,3,3),(3,3,6),(3,6,3), \\ &\quad (5,5,2),(5,2,5),(2,5,5), \\ &\quad (5,4,3),(4,3,5),(3,5,4),(4,5,3),(3,4,5),(5,3,4), \\ &\quad (4,4,4)\} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|A|}{216} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} \\ P(B) &= \frac{|B|}{216} = \frac{25}{216} \end{aligned}$$

d.h. $P(A) < P(B)$.
Man kann natürlich sich auch mittels Kombinatorik überlegen, wieviele Möglichkeiten es für die einzelnen Kombinationen gibt. So gibt es 3! Möglichkeiten für $6-4-1$. Für $5-5-1$ existieren nur 3 Möglichkeiten, da man nur die Position der 1 festlegen muss. Für $4-4-4$ gibt es natürlich nur eine Möglichkeit. Mit dieser Überlegung kommt man schließlich auf die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie zuvor.
Hauptproblem bei der Argumentation von Chevalier de Méré ist: Indem er als Grundmenge die der größe nach sortierten Augenzahlen betrachtet, hat er keinen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum mehr. Einige der angegebenen Kombinationen kommen häufiger vor als andere.

Lösung zur Aufgabe 22 (3 Punkte)

Insgesamt gibt es $\binom{20}{10}$ Möglichkeiten aus 20 Personen 10 Personen zufällig ohne Beachtung der Reihenfolge (und ohne zurücklegen) auszuwählen. Gehen wir davon aus, dass wirklich zufällig ausgewählt wird, sind alle diese Kombinationen gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass dann mindestens 7 Personen, die den Test nicht bestehen (von 8), in der Studiengruppe landen ist

$$\frac{\binom{8}{7} \cdot \binom{12}{3} + \binom{8}{8} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{10}} = \frac{8 \cdot 220 + 1 \cdot 66}{184756} = 0,0099$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist kleiner als $0,05$, demnach kann die Hypothese verworfen werden, d.h. das Ergebnis kam nicht zufällig zustande.