9. Der Satz von Toeplitz

41. Satz von Toeplitz. Sei (a_{nk}) eine unendliche Matrix reeller Zahlen mit den folgenden Eigenschaften

i) $a_{nk} \to 0$ für $n \to \infty$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$,

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \to 1$ für $n \to \infty$,

iii) es gibt ein $C \geq 0$, so dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Sei x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Wir setzen

$$y_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass y_n auch gegen x konvergiert. *Hinweis: die Lösung zu Aufgabe 26.a) kann behilflich sein. Mit $a_{nk} := 1/n$ für $1 \leq k \leq n$ sind die Bedingungen i)–iii) erfüllt. Wie würde der Beweis in diesem Fall gehen?*

42. Sei a_n eine konvergente Folge mit Grenzwert a und $b_n > 0$ eine positive Folge mit $\lim_{n\to\infty}(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: verwenden Sie Aufgabe 41 mit geigneter Wahl von (a_{nk}).

43. Satz von Stolz. Es seien x_n, y_n Folgen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

i) y_n ist strikt monoton aufsteigend und $y_n \to +\infty$,

ii) das Limes $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ existiert.

Beweisen Sie, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: verwenden Sie Aufgabe 42 mit geignetem Wahl von a_n, b_n.

44. Berechnen Sie die folgende Grenzwerte. Hier ist immer $k \in \mathbb{N}$ fest.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^k}(1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k) - \frac{n}{k+1}\right]$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

45. Sei $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie das Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$