8. Zahlenfolgen II.

36. Sei

$$a_n := \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-2)\sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

Zeigen Sie $\lim a_n = 3$.
Hinweis: zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-2)\sqrt{1 + (n-1)\sqrt{(1+n)^2}}}}} = 3 \quad \textit{gilt.}$$

Vergleichen Sie a_n und b_n.

37. Sei $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Formel

$$a_n := \varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \varepsilon_3\sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n\sqrt{2}}}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_i}{2^{i-1}}\Big).$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von a_n (abhängig on der Folge ε_n).

38. Berechnen Sie das Limes $\lim_{n\to\infty} n\sin(2n!\pi e)$. *Hinweis: betrachten Sie die Reihendarstellung von e.*

39. Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}$$

gegen 2 konvergiert. *Hinweis: zeigen Sie zunächst die rekursive Formel $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}a_n + 1$ für $n \geq 1$.*

40. Für $a \in \mathbb{R}$ berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\Big(a + \frac{1}{n}\Big)^2 + \Big(a + \frac{2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(a + \frac{n-1}{n}\Big)^2\right).$$