7. Rekursive Folgen

31. Die Fibonacci–Zahlen sind durch die Rekursion

$$a_1 := 1,\ a_2 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{gilt}$$

mit α, β die zwei Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^2 - x - 1$. Bestimmen sie den Grenzwert von $\sqrt[n]{a_n}$.

32. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ für

$$a_n = \underbrace{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots \cfrac{1}{1}}}}_{n\text{-mal}}$$

33. Zeigen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert folgender, rekursiv definierter Folgen:

a) $a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3) \quad 1 < n \in \mathbb{N}.$

b) $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} \quad n \in \mathbb{N}.$

c) $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad$ für $n \in \mathbb{N}$.

34. Sei a_n eine Folge mit den Eigenschaften

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie die Konvergenz dieser Folge und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

35. Sei $0 < a_1 < 1$. Wir definieren rekursiv

$$a_{n+1} := \cos a_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folge a_n konvergent ist, und dass ihre Grenzwert die eindeutige Lösung der Gleichung $\cos x = x$ ist.