6. Zahlenfolgen

26. Sei $a_n \in \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a.

a) Zeigen Sie, dass die arithmetische Mitte-Folge $A_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ auch gegen a konvergiert.
b) Nehmen wir $a_n \geq 0$ an. Zeigen Sie, dass analog zu a) die geomterische Mitte-Folge $G_n := (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ gegen a konvergiert.
c) Zeigen Sie, dass keine der obigen Aussagen kann man umkehren, d.h., die Konvergenz von A_n bzw. G_n impliziert die Konvergenz von a_n nicht.
d) Gibt es eine Folge a_n so dass A_n konvergiert aber G_n nicht?
e) Gibt es eine Folge a_n so dass G_n konvergiert aber A_n nicht?

27. a) Sei a_n eine positive Folge. Beweisen Sie die folgende Implikation:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \quad \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \to a.$$

b) Bestimmen Sie das folgende Limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

28. In jedem der nachfolgenden Fälle bestimmen Sie den Grenzwert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+\log n} - \dfrac{n+2}{n-6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+\log n} - \dfrac{n^2+2}{n-6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0} - n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{c} - 1\right) n, \quad c > 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n)^n + n^{n+1} - 2(n+2)^{n-1}}{n^n - (n-1)^{n-1} + 3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n)^n + n^n - 2(n+2)^n}{n^n - (n-1)^n}$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5^n + 9^n} - 3^n}{(\alpha + \frac{1}{n})^n}$

29. Rekursiv definieren wir die Folgen a_n und b_n:

$$0 < b_1 < a_1 \text{ beliebig}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass beide Folgen konvergent sind und denselben Grenzwert haben.

30. Sei a_n eine beschränkte Folge mit $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz dieser Folge.