5. Rationale und irrationale Zahlen

21. Bestimme diejenige naturelle Zahlen n, für die die Anzahl der positiven, relativen Primzahlen $< n$ genau $n/3$ ist.

22. Wir untersuchen wie gut eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ durch rationale Zahlen approximiert werden kann.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Zu zeigen ist die Existenz von $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}$$

b) Zeigen Sie, dass $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ sogar so gewählt werden können, dass

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \quad \text{gilt.}$$

c) Zeigen Sie, dass $q_n \to +\infty$.

23. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, falls jedes offene Intervall die Menge M schneidet.

a) Sei α irrational. Zu zeigen ist, dass die Menge

$$M := \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

dicht in $\mathbb{R}$ ist.

b) Gilt die Aussage auch für $\alpha \in \mathbb{Q}$?

c) Beweisen Sie: $\{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $[-1, 1]$.

24. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ definieren wir rekursiv

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}, \ldots, x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n} \quad (\text{falls } x_i \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n-1).$$

Dann gilt

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}}$$

Zeigen Sie, dass die Zahl x genau dann rational ist, wenn $x_n \in \mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

25. Zu zeigen ist, dass man eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}$ so verschieben kann, dass sie in der Menge der irrationalen Zahlen enthalten ist.