4. Geometrie & Ungleichungen

16. Wir färben die Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit rot, blau und grün ein. Beweisen Sie, dass mindestens zwei Punkte existieren, deren Abstand 1 ist und die auch gleich gefärbt sind. Zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist, falls man insgesamt 7 Farben zuläßt.

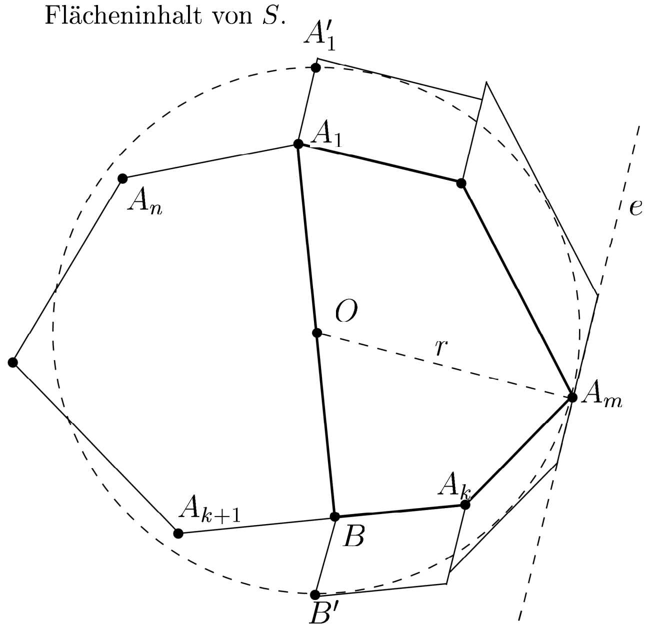
17. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine endliche Menge.

a) Wir projizieren A auf die x-, y- sowie auf die z-Achse, dadurch erhalten wir A_1, A_2, A_3. Bezeichne mit $\#B$ die Zahl der Elemente in B. Beweisen Sie die folgende Ungleichung
$$\max\{\#A_1, \#A_2, \#A_3\} \geq \#A^{\frac{1}{3}}.$$
b) Nun projizieren wir die Menge A auf die Koordninatenebenen y-z, z-x und x-y, damit erhalten wir die Mengen A_1, A_2 und A_3. Beweisen Sie:
$$\max\{\#A_1, \#A_2, \#A_3\} \geq \#A^{\frac{2}{3}}.$$
Hinweis: Betrachten Sie die charakteristischen Funktionen: $\chi(x,y,z) = 1$ für $(x,y,z) \in A$, sonst 0, und analog χ_1, χ_2, χ_3 welche zu den projizierten Mengen A_1, A_2, A_3 gehören. Zeigen Sie zunächst die Ungleichung $\chi(x,y,z) \leq \chi_1(y,z)\chi_2(x,z)\chi_3(x,y)$. Wie kann man $\#A$ durch χ ausdrücken?

18. Sei Γ konvexes Polygon, und bezeichne mit F den Flächeninhalt und mit U den Umfang des Γ. Beweisen Sie die so genannte *isoperimetrische Ungleichung*:
$$F \leq \frac{U^2}{4\pi}.$$
Die Ungleichung kann für beliebige glatte abgeschlossene Kurven Γ verallgemeinert werden, wobei U die Länge der Kurve und F den Flächeninhalt der von Γ eingegrenzten Menge bezeichnet. Versuchen Sie, die verallgemeinerte Aussage genau zu formulieren, und machen Sie sich klar wie man den Beweis führen könnte, falls der Polygon-Fall bekannt ist. Für welche Kurve steht hier eigentlich Gleichheit?

Für den Beweis im Polygon-Fall betrachten Sie die folgende Schritte:

a) Sei Γ das Polygon $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Wähle einen Punkt B auf Γ (z.B. auf der Strecke A_kA_{k+1}), so dass das Polygon $A_1A_2 \ldots A_kB$ Umfang $U/2$ und Flächeninhalt größer als $F/2$ hat.
b) Bezeichne mit O den Mittelpunkt von A_1B, und sei r der grösste Abtand zwischen O und A_i, $i = 1, \ldots, A_k$. Nimm an, dass OA_m diese Länge hat und betrachte der Kreis um O mit Radius r und die Tangente e zu dem Kreis im Punkt A_m; natürlich gilt $e \perp OA_m$. Wir zeichnen zu e parallele Geraden durch A_1 und B. Diese Geraden schneiden die Kreis in den Punkten A_1' und B' (siehe Bild). Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Menge S, eingegrenzt von den Linien $B'B$, BA_1, A_1A_1' und dem Kreisbogen $A_1'B'$.
c) Das Polygon $A_1A_2 \ldots A_kB$ liegt in S. Für jedes $j = 1, \ldots, k$ zeichnen wir Parallelogramme mit einer Seite A_jA_{j+1} und einer anderen Seite parallel zu e.
d) Vergleichen Sie den Flächeninhalt von den Parallelogrammen und von dem Polygon $A_1A_2 \ldots A_kB$ überdeckten Menge mit der Flächeninhalt von S.



19. Gründung von Karthago. Die phönizische Prinzessin Dido verhandelte mit nord-afrikanischen Ureinwohnern, und am Ende kaufte sie ein Stück Land für einen, auf den ersten Blick, ganz hohen Preis: es durfte nur so groß sein, wie sie mit einer einzigen Ochsenhaut abgrenzen könne. Die Prinzessin hatte die Ochsenhaut in viele dünne Streifen geschnitten, die sie zu einem langen Band zusammennähte. Nun grenzte sie ihr ausgehandeltes Land auf der einen Seiten mit der Meeresküste ab und spannte von dort aus einen grossen Halbkreis, auf dem sie Karthago gründete. Beweisen Sie, dass Dido die mathematisch perfekte Lösung wählte (Annahmen: das Band kann nicht verlängert werden, und die Küste ist "natürlich" gerade.)

20. Ein Löwe läuft entlang einer Polygonlinie in einer kreisförmigen Arena (natürlich im antiken Rom). Der Radius des Kreises ist 9m und die Länge der Bahn des Löwen ist 20km. Zeigen Sie, dass die gesamte Drehung des Löwen mindestens 2007 (im Bogenmaß). Formulieren und verallgemeinern Sie mathematisch diese Aussage.