3. Immer noch Ungleichungen

11. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge. Wir projizieren A auf die x- sowie auf die y-Achse, dadurch erhalten wir A_1, A_2. Bezeichne mit $\#B$ der Zahl der Elementen in B. Beweisen Sie die folgende Ungleichung

$$\max\{\#A_1, \#A_2\} \geq \#A^{\frac{1}{2}}.$$

12. Es seien $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ und $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Gilt die Ungleichung auch für fallenden Folgen?

13. Bestimmen Sie das Minimum der Summe $\sum_{k=1}^n a_k^2$ unter der Bedingung, dass $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.

14. Sei $p(x)$ ein Polynom der Form

$$p(x) = x^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \cdots, \quad n \geq 2.$$

Nehmen wir an, dass alle Nullstellen von p reell sind. Zeigen Sie, dass in diesem Fall alle Nullstellen in dem Interval $[a_-, a_+]$ liegen, wobei

$$a_\pm := \frac{b}{n} \pm \frac{n-1}{n}\Big(b^2 - \frac{2n}{n-1}c\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Was ist die Beziehung zwischen b und die Nullstellen des Polynoms? Sei y eine Nullstelle von p, versuchen Sie $(b-y)^2$ abzuschätzen: $(b-y)^2 \leq (n-1)(b^2 - 2c - y)$. Was sagt diese Ungleichung über die Position von y?

15. Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{für } a, b \geq 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $x \mapsto \log x$ konkav und monton wachsend ist.