2. Ungleichungen

6. Sei $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine Permutation von $1, 2, \dots, n$. Man zeige die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

7. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ endliche Menge. Zeigen Sie die Existenz einer Menge $A_0 \subseteq A$ mit

$$\Big|\sum_{z \in A_0} z\Big| \geq \frac{1}{4} \sum_{z \in A} |z|.$$

8. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$$

für $n \geq 2$.

9.

a) Seien $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Wir setzen

$$m := \min\Big\{\frac{a_i}{b_i} : i = 1, \dots, n\Big\} \quad \text{und} \quad M := \max\Big\{\frac{a_i}{b_i} : i = 1, \dots, n\Big\}.$$

Zeigen Sie:

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq M.$$

b) Seien $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < \pi/2$, $n > 1$. Zu zeigen ist:

$$\tan\varphi_1 \leq \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \cdots + \sin\varphi_n}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cdots + \cos\varphi_n} \leq \tan\varphi_n.$$

10. Es seien $a, b > 0$ und $0 < p < 1$. Man zeige $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.