



### 10. Wieder Irrationale Zahlen

46. a) Zeigen Sie, dass  $e$  irrational ist. *Hinweis: Beweisen Sie indirekt: falls  $e = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  so gilt  $bn!e = an!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Was passiert wenn  $n$  sehr groß ist?*  
 b) Zeigen Sie, dass  $e^2$  irrational ist. *Hinweis: Beweisen Sie mit Widerspruch:  $ea = e^{-1}b$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$ ; siehe Teil a).*

47. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Irrationalität von  $\pi$  zu zeigen.

- a) Für ein festes  $r$  betrachte die Zahl

$$a_n := \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos rx \, dx$$

Zeigen Sie, dass für  $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2n(2n-1)a_{n-1} - 4n(n-1)a_{n-2}}{r^2} \quad \text{gilt.}$$

- b) Bestimmen Sie  $a_0$  und  $a_1$ .  
 c) Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{n!}{r^{2n+1}} (p(r) \sin r - q(r) \cos r),$$

mit  $p, q$  Polynome mit ganzen Koeffizienten und  $\deg p, \deg q \leq 2n-1$ .

- d) Bisher war  $r \in \mathbb{R}$  beliebig, nun setze  $r = \pi/2$ . Zeigen Sie:

$$0 < a_n \leq \int_{-1}^1 \cos rx \, dx =: c$$

- e) Indirekt nehmen wir  $\pi = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}_+$  an. Zeigen Sie, dass  $\frac{a^{2n+1}}{n!} a_n$  eine ganze Zahl ist.  
 f) Schliessen Sie einen Widerspruch aus e) und d).

48. Eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt *Liouville-Zahl*, falls für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$  mit

$$(*) \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

- a) Zeigen Sie, dass eine Liouville-Zahl irrational ist. *Hinweis: Um mit dem Begriff vertraut zu sein, zeigen Sie zunächst, dass eine ganze Zahl nicht Liouville-Zahl sein kann. Dann nehme indirekt an, die Liouville-Zahl  $x$  rational wäre ( $x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b > 1$ ). So gilt  $\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{bq} \geq \frac{1}{2b}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$  mit  $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$ . Da (\*) für jedes  $n$  gilt (für ein  $q$  und  $p$ ), kann man mit geeigneter Wahl von  $n$  einen Widerspruch (mit (\*)) folgern.*  
 † b) Wir setzen  $\ell := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ . Zeigen Sie, dass  $\ell$  eine Liouville-Zahl ist.

49. Sei  $P$  ein Polynom des Grades  $n$  und  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  eine Nullstelle von  $P$ . Dann existiert eine Konstante  $C$  so dass,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}, b > 0.$$

Um dies zu zeigen überlegen Sie die folgende Schritte:

- a) Zeigen Sie, dass  $q^n P(\frac{p}{q})$  für jedes  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  eine ganze Zahl ist.  
 b) Zeigen Sie, dass  $|P(\frac{p}{q})| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot |P'(\xi)|$  für ein  $\xi$  zwischen  $\alpha$  und  $\frac{p}{q}$ .  
 c) Setze  $m := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |P'(x)|$  und es seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  die reelle Nullstellen von  $P$  die von  $\alpha$  verschieden sind. Wähle ein  $0 < C < \min\{1, 1/m, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_k|\}$ . Wir behaupten, dass  $C$  der gewünschten Bedingung genügt. Indirekt nehmen wir an, dass es  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  mit  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^n} \leq C$  gäbe. Zeigen Sie:  
 i) Es gilt  $P(\frac{p}{q}) \neq 0$ , und daher  $|q^n P(\frac{p}{q})| \geq 1$ .  
 ii) Schliessen Sie aus b) und der indirekten Annahme, dass  $|q^n P(\frac{p}{q})| < 1$  gilt, und damit auch einen Widerspruch.

50. Zeigen Sie, dass eine Liouville-Zahl  $\alpha$  *transzendent* ist, d.h. es gibt kein Polynom  $P$  mit ganzzahligen Koeffizienten mit  $\deg P \geq 1$ , so dass  $P(\alpha) = 0$ . *Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 48 und 49.*