



1. Blatt

1. Sei $p(x)$ ein Polynom des Grades $\deg p = n \geq 2$ mit reellen Koeffizienten der Form

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

Zu zeigen ist, dass unter der Annahme $b^2 - \frac{2n}{n-1}ac < 0$ das Polynom maximal $n - 2$ reelle Nullstellen besitzen kann. (Was heißt die Aussage hier für $n = 2$?)

2. Wir betrachten ein Polyeder, dessen Ecken durch $1, 2, \dots, n$ nummeriert sind. Wir definieren eine $n \times n$ -Matrix M : $m_{ij} = 1$ falls die i te und die j te Ecke mit einer Kante verbunden sind, sonst ist $m_{ij} = 0$. Zeigen Sie, dass der Wert von $\det M$ von der Nummerierung der Ecken unabhängig ist. Berechnen Sie die Determinanten die zu dem Oktaeder, dem Tetraeder oder dem Würfel gehören. Zeigen Sie: Treffen in jeder Ecke genau p Kanten, dann ist $\det M$ durch p teilbar.

3. Sei $f(x) := \frac{2x}{1+e^{2x}}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$ eine ganze Zahl ist.

4. Sei Δ ein gleichseitiges Dreieck (abgeschlossene Dreiecksfläche). Zeigen Sie das Folgende: Falls Δ durch 5 gleichseitige Dreiecken mit Seitenlänge 1 überdeckt werden kann, so ist das auch mit nur 4 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 möglich.

5. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ die Summe zweier periodischer Funktionen?