D. Irrationale Zahlen

†23. a) Zeigen Sie, dass e irrational ist. *Hinweis: Beweisen Sie indirekt: falls* $e = \frac{a}{b}$ *mit* $a, b \in \mathbb{Z}$ *so gilt* $bn!e = an!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Was passiert wenn* n *sehr groß ist?*

b) Zeigen Sie, dass e^2 irrational ist. *Hinweis: Beweisen Sie mit Widerspruch:* $ea = e^{-1}b$ *mit* $a, b \in \mathbb{Z}$*; siehe Teil a).*

†24. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Irrationalität von π zu zeigen.

a) Für ein festes r betrachte die Zahl

$$a_n := \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos rx \, \mathrm{d}x$$

Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2n(2n-1)a_{n-1} - 4n(n-1)a_{n-2}}{r^2} \quad \text{gilt.}$$

b) Bestimmen Sie a_0 und a_1.

c) Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{n!}{r^{2n+1}} \Big(p(r) \sin r - q(r) \cos r \Big),$$

mit p, q Polynome mit ganzen Koeffizienten und $\deg p, \deg q \leq 2n - 1$.

d) Bisher war $r \in \mathbb{R}$ beliebig, nun setze $r = \pi/2$. Zeigen Sie:

$$0 < a_n \leq \int_{-1}^{1} \cos rx \, \mathrm{d}x =: c$$

e) Indirekt nehmen wir $\pi = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_+$ an. Zeigen Sie, dass $\frac{a^{2n+1}}{n!} a_n$ eine ganze Zahl ist.

f) Schliessen Sie einen Widerspruch aus e) und d).

†25. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *Liouville-Zahl*, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ mit

$$(*) \qquad 0 < \left| x - \tfrac{p}{q} \right| < \tfrac{1}{q^n}$$

a) Zeigen Sie, dass eine Liouville-Zahl irrational ist. *Hinweis: Um mit dem Begriff vertraut zu werden, zeigen Sie zunächts, dass eine ganze Zahl nicht Liouville-Zahl sein kann. Dann nehme indirekt an, die Liouville-Zahl* x *rational wäre* ($x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$)*. So gilt* $|x - \frac{p}{q}| = |\frac{a}{b} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{bq} \geq \frac{1}{2b}$ *für alle* $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ *mit* $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$*. Da* $(*)$ *für jedes* n *gilt (für ein* q *und* p*), kann man mit geeigneter Wahl von* n *einen Widerspruch (mit* $(*)$*) folgern.*

† b) Wir setzen $\ell := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$. Zeigen Sie, dass ℓ eine Liouville-Zahl ist.

†26. Sei P ein Polynom des Grades n und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von P. Dann existiert eine Konstante C so dass,

$$\left| \alpha - \tfrac{p}{q} \right| \geq \tfrac{C}{q^n} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z},\, b > 0.$$

Um dies zu zeigen überlegen Sie die folgende Schritte:

a) Zeigen Sie, dass $q^n P(\frac{p}{q})$ für jedes $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ eine ganze Zahl ist.

b) Zeigen Sie, dass $|P(\frac{p}{q})| = |\alpha - \frac{p}{q}| \cdot |P'(\xi)|$ für ein ξ zwischen α und $\frac{p}{q}$.

c) Setze $m := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |P'(x)|$ und es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die reelle Nullstellen von P die von α verschieden sind. Wähle ein $0 < C < \min\{1, 1/m, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_k|\}$. Wir behaupten, dass C der gewünschten Bedingung genügt. Indirekt nehmen wir an, dass es $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^n} \leq C$ gäbe. Zeigen Sie:

   i) Es gilt $P(\frac{p}{q}) \neq 0$, und daher $|q^n P(\frac{p}{q})| \geq 1$.

   ii) Schliessen Sie aus b) und der indirekten Annahme, dass $q^n P(\frac{p}{q})| < 1$ gilt, und damit auch einen Widerspruch.

†27. Zeigen Sie, dass eine Liouville-Zahl α *transzendent* ist, d.h. es gibt kein Polynom P mit ganzzahligen Koeffizienten mit $\deg P \geq 1$, so dass $P(\alpha) = 0$. *Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 48 und 49.*

†28. Für $s > 0$ heißt eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ *s-Hausdorff-Nullmenge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ M durch Intervallen I_k überdeckt werden kann, so dass $|I_k| \leq \varepsilon$ und $\sum_k |I_k|^s \leq \varepsilon$. Insbesondere sind 1-Hausdorff-Nullmengen genau die Lebesgue-Nullmengen. Zum Beispiel ist die $\frac{1}{3}$-Cantor-Menge für jedes $s > \frac{\log 2}{\log 3}$ eine s-Hausdorff-Nullmenge (dies ist aber *nicht* zu beweisen). Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Liouville-Zahlen.

a) Zeigen Sie:

$$\mathcal{L} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{mit} \quad G_n := \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q^n}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q^n}\right).$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathcal{L}$ von erster Kategorie ist (d.h. $\mathcal{L}$ ist *residual*).

c) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < s \leq 1$ die Menge $\mathcal{L}$ aller Liouville-Zahlen eine s-Hausdorff-Nullmenge ist. *Hinweis: für $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathcal{L} \cap (-N, N) \subseteq \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-Nq}^{Nq} \left(\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q^n}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q^n}\right).$$

Für die Intervallen in dieser Überdeckung und für geigentes $n \in \mathbb{N}$ sind die gewünchte Bedingungen erfüllt.