C. Der Lebesgue-Dichtesatz

†16. Wir schreiben die Zahlen x im Intervall $[0,1]$ in dem Zahlensystem zu Basis 3 auf, d.h., $x = 0, x_1 x_2 \ldots$, wobei die Ziffern nur $0, 1$ oder 2 sein können. Für bestimmten Zahlen gibt es aber zwei Möglichkeiten: entweder enden sie mit $00 \ldots 0 \ldots$ oder mit $22 \ldots 2 \ldots$, zum Beispiel:

$$\tfrac{2}{3} = 0,200\ldots 0\ldots \quad \text{und} \quad 0,122\ldots 2\ldots$$

Zeigen Sie, dass für die $\frac{1}{3}$-Cantor-Menge C gilt:

$$C = \Big\{ x \in [0,1] : \ x \text{ besitzt eine Darstellung zur Basis 3, die kein 1 enthält} \Big\}.$$

†17. Sei $C \subseteq [0,1]$ die $\frac{1}{3}$-Cantor-Menge. Zeigen Sie, dass $C - C = C + C - 1$, und $C - C = [-1,1]$.

†18. Wir färben die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit 2 Farben aus. Zeigen Sie, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten parallel zu den Achsen gibt, dessen 3 Ecken gleich gefärbt sind. Zeigen Sie dieses Resultat auch dann, wenn sogar endlich viele Farben erlaubt sind.

Differenzieren von Maßen. Es sei μ ein Borel-Maß in $\mathbb{R}^d$. Wir setzen

$$D\mu(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} \quad \text{falls das Limes existiert.}$$

Satz. Sei μ ein komplexes oder ein lokal-endliches Maß (d.h., für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\mu(K) < +\infty$). Bezeichne mit $B(x,r)$ die Kugel um x mit Radius r, und mit λ_d das d-dimensionale Lebesgue-Maß. Sei $\mu = \int f \, \mathrm{d}\lambda_d + \nu$ die Lebesgue-Zerlegung. Dann existiert das obige Limes für λ_d-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und es gilt

$$D\mu(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Man nennt $D\mu(x)$ *die (Radon-Nikodym) Ableitung von* μ bezüglich des Lebesgue-Maß an der Stelle $x \in \mathbb{R}^d$.

†19. Lebesgue-Dichtesatz. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wir nennen $x_0 \in A$ ein *Dichtepunkt* von A, falls

$$d(A, x_0) := \lim_{r \to 0} \frac{\lambda_d(A \cap B(x_0, r))}{\lambda_d(B(x_0, r))} = 1.$$

Zeigen Sie, dass für eine Lebesgue-messbare Menge A fast alle Punkte von A Dichtepunkte sind. Es gilt ferner $d(A,x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$. *Hinweis: Verwenden Sie den obigen Satz für ein geeignetes Maß* μ.

Die obige Aussagen bleiben auch wahr, wenn man die Kugel $B(x,r)$ durch den Würfel $Q(x,r)$ (um Mittelpunkt x mit Seitenlänge $2r$) ersetzt.

†20. Satz von Steinhaus. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine messbare Menge von positiven Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass $A - A$ ein Intervall enthält (vgl. 17). *Hinweis: Zeigen Sie, dass für geeigentes* $\delta > 0$ *und für alle* $r \in (0,\delta)$ *die Menge* $A \cap (A + r)$ *nichtleer ist. Verwenden Sie dazu den Dichte-Satz.*

†21. Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ eine messbare, additive Untergruppe. Beweisen Sie, dass entweder $\lambda_1(G) = 0$ oder $G = \mathbb{R}$ gilt. *Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 20.*

†22. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge von positiven Lebesgue-Maß, deren Punkte Mit abzählbar vielen Farben gefärbt sind, so dass die gleichfarbige Teilmengen messbar sind. Zeigen Sie, dass es ein gleichschenklige und rechtwinkliges Dreieck gibt, dessen 3 Ecken gleich gefärbt sind (vgl. 18). *Hinweis: verwende Sie den Dichte-Satz. Es gibt eine einfarbige Menge* A *von positiven Maß, sei* x_0 *ein Dichte-Punkt von* A*. Zeigen Sie dass* $A \cap \big(A + (\delta, 0)\big) \cap \big(A + (0, \delta)\big)$ *für geeingetes* $\delta > 0$ *nichtleer ist. Was bedeutet das, wenn* y *in dieser Menge liegt?*