B. Die Sätze von Hahn-Jordan, Radon-Nikodym und Lebesgue

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Eine σ-additive Funktion $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ heißt *signiertes Maß.*

†8. Hahn-Zerlegung. Für ein signiertes Maß μ existieren $N, P \in \mathcal{M}$ mit $X = N \cup P$ und $N \cap P = \emptyset$, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A \cap P) \geq 0 \quad \text{und} \quad \mu(A \cap N) \leq 0 \quad \text{gelten.}$$

Zeigen Sie zunächst:

a) *Die (endliche) signierte Maße bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

b) *Ein signiertes Maß kann nicht beide Werte $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.*

c) *Ist $A, B \in \mathcal{M}$ und $B \subseteq A$, so gelten*

$$\mu(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) < +\infty; \qquad \textit{und} \quad \mu(A) > -\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) > -\infty.$$

d) *Wir nennen eine Menge A* negativ, *falls für alle $B \subseteq A$ die Ungleichung $\mu(B) \leq 0$ gilt. Ist $\mu(A) < 0$ so existiert eine negative Menge $A' \in \mathcal{M}$, $A' \subseteq A$ mit $\mu(A') \leq \mu(A)$. Zum Beweis:*

   i) *Sei $k_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, so dass eine Menge $A_1 \subseteq A$ existiert mit $\mu(A_1) \geq 1/k_1$. Falls keine solche Zahl gibt es, dann ist $A' = A$ eine passende Wahl.*

   ii) *Es gilt $\mu(A \setminus A_1) \leq \mu(A)$. Für die Menge $A \setminus A_1$ verwenden wir i), und erhalten k_2 und A_2 mit $\mu(A \setminus A_1 \setminus A_2) \leq \mu(A)$ und $\mu(A_2) \geq 1/k_2$. Rekursiv findet man A_n und $k_n \in \mathbb{N}$. Die Konstruktion kann in endlich vielen Schritten zu Ende kommen, also wir finden z.B. kein k_n mehr. In diesem Fall, ist $A' := A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ eine passende Wahl.*

   iii) *Es gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_n} < +\infty$, und daher $k_n \to \infty$ für $n \to \infty$.*

   iv) *Wir setzen $A' := A \setminus \bigcup_n A_n$. Die Menge A' hat die gewünschte Eigenschaften.*

Nun zum Beweis der Hahn-Zerlegung:

d) *OBdA: μ nimmt den Wert $-\infty$ nicht an.*

e) *Sei $\alpha := \inf_{A \text{ negativ}} \mu(A)$. Betrachte eine Folge A_n mit $\mu(A_n) \to \alpha$. Zeigen Sie, dass $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine negative Menge ist, es gilt $-\infty < a \leq 0$, und ferner sind mit $P := X \setminus N$ die gewünschte Eigenschaften erfüllt.*

†9. Jordan-Zerlegung. Wir setzen

$$\mu_+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A\} \quad \text{und} \quad \mu_-(A) := -\inf\{\mu(B) : B \subseteq A\}$$

Dann Sind μ_+ und μ_- positive Maße und μ läßt sich als $\mu = \mu_+ - \mu_-$ zerlegen. *Hinweis: verwenden Sie die Hahn-Zerlegung und zeigen Sie: $\mu_+(A) = \mu(A \cap P)$ und $\mu_-(A) = \mu(A \cap N)$.*

Es seien μ und ν positive Maße. Wir nennen ν *absolut stetig* bezüglich μ, falls für alle $A \in \mathcal{M}$ die Gleichheit $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$ impliziert; die Notation dafür ist $\nu \ll \mu$. Falls $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$, so heißen μ und ν äquivalent: $\mu \sim \nu$. Ferner heißen μ und ν (zu einander) *singulär*, falls eine Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\nu(A) = 0$ und $\mu(X \setminus A) = 0$.

†10. Zeigen Sie die folgende Aussagen:

a) $\ll$ ist eine transitive Relation, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) $\perp$ ist eine symmetrische Relation.

c) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, so ist $\nu = 0$.

d) Es gilt $\mu_j \ll \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

e) Für $\nu_j \ll \mu$ $(j = 1, \dots)$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \ll \mu$.

f) Für $\nu_j \perp \mu$ $(j = 1, \dots)$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \perp \mu$.

g) Falls $\nu \ll \mu \perp \sigma$, so gilt $\nu \perp \sigma$.

†11. Sei $f : X \to \mathbb{R}_+$ integrierbar, wir setzen

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{M}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass somit ein Maß definiert wird, das bezüglich μ absolut stetig ist.

†12. Für endliche Maße μ, ν betrachten wir die Menge

$$\mathcal{F} := \Big\{ 0 \le g \in L^1(\mu) : \int_A f \, \mathrm{d}\mu \le \nu(A) \Big\}$$

Beweisen Sie:

i) $0 \in \mathcal{F}$.
ii) Für $f, g \in \mathcal{F}$ gilt $\max(f, g) \in \mathcal{F}$.
iii) Es gibt $f \in \mathcal{F}$ mit

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup \Big\{ \int_X g \, \mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{F} \Big\}.$$

σ-endlicher Maßraum.

†13. Satz von Radon–Nikodym und Lebesgue. Seien μ, ν positive und *endliche* Maße. Dann existierert eine Zerlegung $\nu = \alpha + \beta$ mit $\alpha \ll \mu$ und $\beta \perp \mu$. Falls $\nu \ll \mu$, dann gibt es eine positive messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass (1) gilt. Alle dieser Darstellungen sind eindeutig.
Zum Beweis betrachten Sie die folgende Schritte:

a) *Sei f die Funktion aus 12.c). Wir setzen $\beta(A) := \nu(A) - \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Dann ist β ein positives Maß.*
b) *Es gilt $\beta \perp \mu$. Um dies zu zeigen:*
   i) *Setze $\beta_n := \beta - \frac{1}{n}\mu$ und betrachte die zugehörige Hahn-Zerlegung $X = P_n \cup N_n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F := f + \frac{1}{n}\chi_{P_n}$ zu $\mathcal{F}$ gehört.*
   ii) *Zeigen Sie $\mu(P_n) = 0$ und $\mu(P) = 0$ für $P := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$.*
   iii) *Zeigen Sie $\beta(N) = 0$ mit $N = X \setminus P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$.*
c) *Wir setzen $\alpha(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. Zeigen Sie, dass α und β die gewünschte Eigenschaften haben.*

Die Funktion f in dem obigen Satz heißt die Radon-Nikodym Ableitung von ν bezüglich μ. Manchmal wird die Notation $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

†14. Die Sätze von Radon–Nikodym und Lebesgue gelten für ν, μ σ-endliche Maße. *Führen Sie diesen Fall auf den endliche Fall zurück.*

Für ein signiertes Maß betrachte die Jordan-Zerlegung und setze $\tau := \nu_+ + \nu_-$. Dann ist τ ein positives Maß und heißt die *totale Variation* von ν. Wenn μ ein positives Maß ist, nennen wir ν singulär bzw. absolut stetig bezüglich μ, falls die totale Variation τ jeweils diese Eigenschaften besitzt. Mit dieser Definiton gilt der Radon-Nikodym-Lebesgue Satz für σ-endliche signierte Maße ν und positive Maße μ.

†15. Seien μ, ν positive Maße mit $\nu \ll \mu$ und f die Radon-Nikodym Ableitung von ν bezüglich μ. Zeigen Sie, dass

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X gf \, \mathrm{d}\mu \quad \text{gilt für } g \in L^1(\nu).$$

Zunächst zeigen Sie dies für einfache Funktionen.