A. Der Bairesche Kategoriensatz

Im Folgenden sei (X, d) vollständiger, metrischer Raum.

†1. Seien $X \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ nicht leere, abgeschlossene Mengen mit $\operatorname{diam} F_n \to 0$ für $n \to \infty$. Beweisen Sie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Durch Beispiele zeigen Sie die Notwendigkeit der Bedingungen.

†2. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *dicht* in X, falls der Abchluss von A gleich X ist, also $\overline{A} = X$. Ferner heißt A *nirgends dicht*, falls für jede offene Menge G eine offene Kugel $B(x,r) \subseteq G$ mit $B(x,r) \cap A = \emptyset$ existiert. Ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit A_n nirgends dicht, so heißt A von *erster Kategorie*, sonst *von zweiter Kategorie*. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

a) A ist dicht genau dann, wenn für jedes $x \in X$ eine Folge $(x_n) \subseteq A$ mit $x_n \to x$ existiert.
b) Sind A, B dicht so ist $A \cup B$ auch dicht (aber $A \cap B$ nicht unbedingt).
c) Sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ nirgends dicht, so ist $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ auch nirgends dicht.
d) Sind $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ von erster Kategorie, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ auch von erster Kategorie.

†3. Baire-Kategoriensatz: Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $\emptyset \neq G \subseteq X$ offen. So ist G nicht von erster Kategorie.
Hinweis: Indirekt sei $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ mit H_n nirgends dicht. Induktiv finden Sie $G \supseteq \overline{B}(x_1, r_1) \supseteq B(x_1, r_1) \supseteq \overline{B}(x_2, r_2) \supseteq B(x_2, r_2) \supseteq \cdots \supseteq \overline{B}(x_n, r_n) \supseteq B(x_n, r_n) \supseteq \cdots$, mit $B(x_n, r_n) \cap H_n = \emptyset$. Verwenden Sie †1.

Man möge sich es so auffassen, dass Mengen von erster Kategorie sind, in einem bestimmten Sinn, *klein*. Der obige Satz druckt aus, dass nichtleere offene Mengen in X sind aber *groß*. Ferner ist der Satz in *Existenzbeweisen* manchmal ganz nützlich, und erlaubt es, unter anderen, die folgende, nicht triviale Resultaten (5, 6) zu beweisen.

†4. Eine F_σ-Menge $A \subseteq X$ ist von erster Kategorie genau dann, wenn $\operatorname{int} A = \emptyset$, also das Inneres von A leer ist.
Hinweis: Eine abgeschlossene Menge F is nirgends dicht falls $\int F = \emptyset$. Eine Menge von erster Kategorie muß leeres Inneres besitzen. Umgekehrt zeigen Sie: falls eine F_σ Menge A leeres inneres hat, so gilt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ mit F_n abgeschlossen und $\operatorname{int} F_n = \emptyset$.

†5. Die Menge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht eine G_δ-Menge (also ist nicht der Schnitt von abzählbar vielen offenen Mengen).
Hinweis: Man zeige, dass für G_δ-Mengen die Eigenschaften "nirgends dicht" und "von erster Kategorie" äquivalent sind. Dazu Beweisen Sie, dass das Komplement einer G_δ Menge F_σ ist, und verwenden Sie †4. Schließlich: $\mathbb{Q}$ ist nicht nirgends dicht aber ist von erster Kategorie.

†6. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Nehmen wir an, dass für jedes $x > 0$ gilt $f(kx) \to 0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.
Hinweis: Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $A_n := \{x : |f(kx)| \leq \varepsilon \text{ für alle } k \geq n\}$. Dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq (0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass die Mengen A_n abgeschlossen sind, und für ein n_0 A_{n_0} ein Intervall $[a, b]$ enthält. Zeigen Sie, dass $B_{n_0} := \{kx : x \in [a, b], k \geq n_0, k \in \mathbb{N}\}$ eine Halbgerade enthält.

†7. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den Unterschied zwischen "klein in dem Kategorien-Sinn" un "klein in dem Lebesgue-Sinn" zu untersuchen. Sei $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Wir setzen

$$G_{\frac{1}{n}} := \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \tfrac{1}{n}2^{-k}, r_k + \tfrac{1}{n}2^{-k}), \quad A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}, \quad \text{und} \quad B := \mathbb{R} \setminus A.$$

Zeigen Sie: A ist eine Lebesgue-Nullmenge und B ist von erster Kategorie. (Also $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung "zweier kleinen" Mengen.)