Evolutionsgleichungen SS2007
Bálint Farkas
Horst Heck
18. April 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu gleichmäßig stetigen Halbgruppen

1. Sei X Banachraum und $F, G : [a,b] \to \mathcal{L}(X)$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:
a) $(F + T \cdot G)' = F' + T \cdot G'$ für $T \in \mathcal{L}(X)$.
b) $(FG)' = F'G + FG'$.
c) Gilt $F'(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$, so ist F konstant. *Hinweis: Betrachten Sie für $x \in X$, $y \in X'$ die Funktion $t \mapsto \langle F(t)x, y\rangle$.*

2. Sei X Banachraum. Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathcal{L}(X)$ äquivalent sind
a) $AB = BA$,
b) $Be^{tA} = e^{tA}B$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
c) $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. Es sei X Banachraum und $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Beweisen Sie:
a) Die Funktion definiert durch
$$f(z) := e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zA)^n}{n!}$$
ist holomorph (komplex differenzierbar) auf $\mathbb{C}$.
b) Gilt $e^{tA} = e^{tB}$ für $t \geq 0$, so folgt $A = B$.

4. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv*, falls alle ihre Einträge positiv sind. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
a) e^{tA} ist positiv für alle $t \geq 0$.
b) $A + I\|A\|$ ist positiv.
c) $A = (a_{ij})$ und $a_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$.

5. Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ unitär ist, genau dann, wenn A schiefadjungiert ist, also $A^\star = -A$.

6. Für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ rechnet man $(e^{tA})_{t\geq 0}$ mit Hilfe der Jordan-Normalform "leicht" aus. Frischen Sie Ihre Kenntnisse darüber auf.

7. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das mögliche Wachstum von e^{tA} für $t \to +\infty$ zu untersuchen. Wir wissen schon $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$, $t \geq 0$ für beschränkte Operatoren A.
a) Zeigen Sie, dass
$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$
eine Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ definiert. Gibt es eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ für die $T(t) = e^{tA}$ gilt? Bestimmen Sie die Größenordnung von $\|T(t)\|$.
b) Gegeben sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein Beispiel einer Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0} = (e^{tA})_{t\geq 0}$ an, für das
$$c(1 + t^k) \leq \|T(t)\| \leq C(1 + t^k) \quad \text{für } t \geq 0.$$
Hinweis: Siehe Teil a).