Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \quad + \ b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \quad + \ b_2(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) \quad + \ b_n(t) \end{aligned}$$

Oder in der Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\cdot\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Die Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\boldsymbol{y}'(t) = A\cdot\boldsymbol{y}(t)$ ist für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert und lautet:

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\cdot\boldsymbol{c}$$

Dabei ist die

Matrix-Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ wie folgt definiert:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Konvergenz: Sei $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Die Matrixnorm $\|\ \|_M : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist durch

$$\|A\|_M := \sup\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$$

erklärt. Es gilt

- $\|Av\| \leq \|A\|_M\cdot\|v\| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\|A + B\|_M \leq \|A\|_M + \|B\|_M$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M\|B\|_M$. Insbesondere $\|A^k\|_M \leq \|A\|_M^k$.

Mit dieser Norm gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{t^k A^k}{k!}\right\|_M \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k\|A\|_M^k}{k!} < \infty$. Da also die Exponentialreihe in $\mathbb{R}^{n\times n}$ absolut konvergent ist, konvergiert sie gegen ein Element aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ das wir mit e^{tA} oder $\exp(tA)$ bezeichnen.

Differenziation:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{t^k A^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} \overset{\ell = k-1}{=} A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell A^\ell}{\ell!} = \\ = A\cdot e^{tA}$$

Weitere Eigenschaften:

- $AB = BA$ impliziert $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$
- e^A ist immer invertierbar und es gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Zusammenfassend:

Satz. Die vollständige allgemeine Lösung von $\boldsymbol{y}'(t) = A\cdot\boldsymbol{y}(t)$ lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\cdot\boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

und das AWP $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{z}$ hat die Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot\boldsymbol{z}$$

Ist $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar so ist $Y(t) = e^{tA}\cdot C$ ein Fundamentalsystem (Fundamentalmatrix) der DGL-Systems $\boldsymbol{y}'(t) = A\cdot\boldsymbol{y}(t)$

Explizite Berechnungen von e^{tA} und der Lósungen von $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Vorbemerkung: Ist $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{u}(t) + i\boldsymbol{v}(t)$ eine komplexe Lösung von $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so sind $u(t) = \mathrm{Re}\ z(t)$ und $v(t) = \mathrm{Im}\ z(t)$ ebenfalls Lösungen.

Lösungsverfahren für $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$:

- Eigenwerte mit algebraischen Vielfachkeiten berechnen:

$$\det(A - xE) = \pm(x - \lambda_1)^{k_1}(x - \lambda_2)^{k_2} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r}$$

- Als Verallgemeinerung von Eigenräumen $\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \ker(A-\lambda E)$ definiert man jetzt die Haupträume
$$\mathrm{Haup}(A,\lambda) = \ker(A-\lambda E)^n$$
$v \in \mathrm{Haup}(A,\lambda)$ heißt ein *Hauptvektor* der Stufe ℓ falls $(A-\lambda E)^\ell(v) = 0$. So sind alle λ–Eigenvektoren λ–Hauptvektoren der Stufe 1. Man muss also das lineares Gleichungsystem $(A-\lambda E)^n v = 0$ lösen um aus den Lösungen v_j eine Basis auswählen zu können.

Satz. Sei $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear. Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ hat eine $\mathbb{C}$–Basis, die nur aus Hauptvektoren von A besteht:
$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Haup}(A,\lambda_1) \oplus \mathrm{Haup}(A,\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Haup}(A,\lambda_r)$$

Anmerkung. Man kann eine Basis $\mathcal{B} = (w_1,\dots,w_m)$ von $W := \mathrm{Haup}(A,\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ immer so wählen, dass gilt
$$\left[A|_W\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_\ell \times k_\ell} \quad \text{(sog. Jordan-Block)}$$

$$\exp t \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_p} \end{pmatrix}, \qquad \exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & \frac{t^{k-1}}{k-1!} \\ & 1 & t & & \frac{t^{k-2}}{k-2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & t^2/2 \\ 0 & & & 1 & t \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

- Sei $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Haup}(A,\lambda)$ der Stufe ℓ, $A \in \mathbb{R}^{n\times}$. Dann ist
$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{Re}\left[e^{t\lambda}\left(\boldsymbol{v} + t(A-\lambda E)\boldsymbol{v} + \cdots + \frac{t^{\ell-1}}{\ell!}(A-\lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v}\right)\right]$$
sowie
$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{Im}\left[e^{t\lambda}\left(\boldsymbol{v} + t(A-\lambda E)\boldsymbol{v} + \cdots + \frac{t^{\ell-1}}{\ell!}(A-\lambda E)^{\ell-1}\boldsymbol{v}\right)\right]$$
eine reelle Lösung von $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Der Realteil und der Imaginärteil sind nur dann linear unabhängig, wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Für den Fall $n = 2$ siehe [MV]II, Seiten 120-123.

Lösung des inhomogenen DGL-systems $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$. Angenomment, ein Fundamentalsystem $Y(t)$ des homogenen DGL-Systems $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$ sei bereits bekannt. Der Ansatz
$$\boldsymbol{y}_p(t) = Y(t)\boldsymbol{c}(t)$$
führt auf $\boldsymbol{c}(t)' = Y(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)$ d.h. $\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds$ und damit ist
$$\boldsymbol{y}(t) = Y(t)\Big(\int_{t_0}^t Y(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds + \boldsymbol{c}_0\Big)$$
eine allgemeine Lösung von $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + b(t)$