Existenzsätze

In den folgenden Sätzen sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Teilmenge.

Satz von Peano. Ist $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$, so besitzt das AWP

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$$

mindestens eine Lösung, die sich bis zum Rande von U fortsetzen läßt.

Satz von Picard-Lindelöf. Ist $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung, d.h., für jeden Punkt $(s_0, \boldsymbol{x}_0) \in U$ existiert eine Konstante $L = L(s_0, \boldsymbol{x}_0)$, so dass

$$\|\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{y})\| \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad (t, \boldsymbol{x}),\ (t, \boldsymbol{y}) \in B_\epsilon(s_0, \boldsymbol{x}_0)$$

gilt, (Diese Bedingung ist automatisch erfüllt wenn $\boldsymbol{v} \in C^1(U)$), dann hat das AWP $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad y(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ genau eine Lösung, die sich bis zum Rande von U fortsetzen läßt.

Lineare DGL-Systeme sind DGL-Systeme vom folgenden Typ:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A(t) \cdot \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

wobei die *Koeffizientenmatrix* $A(t)$ eine $n \times n$ Matrix von Funktionen $a_{ij}(t)$ ist, $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ und $\boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$ die *Störfunktion* heißt. Im Fall $\boldsymbol{b} \not\equiv 0$ spricht man von einem inhomogenenen und im Fall $\boldsymbol{b} = 0$ von einem homogenen linearen DGL-system.

Konsequenzen aus dem PL-Satz. Besteht die $n \times n$ Koeffizientenmatrix $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ aus stetigen Funktionen $a_{ij}(t)$, so ist der Lösungsraum von

$$(*) \qquad \boldsymbol{y}'(t) = A(t) \cdot \boldsymbol{y}(t) \qquad \big(\text{ hierbei } \boldsymbol{v} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (t, \boldsymbol{y}) \mapsto A(t)\boldsymbol{y}\ \big)$$

ein n–dimensionaler Vektoraum.

Beispiel. Eine gewöhnliche lineare DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t) y = b(t)$$

ist äquivalent zu dem folgenden DGL-System (erster Ordnung):

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ der entsprechenden homogenen DGL ist ein n–dimensionaler Vektorraum.

Wronski-Determinante. Sind $\boldsymbol{y}_1(t), \dots, \boldsymbol{y}_n(t)$ n (nicht notwendig verschiedene) Lösungen von $(*)$ so heißt:

$$Y(t) := \big(\boldsymbol{y}_1(t), \dots, \boldsymbol{y}_n(t)\big) \quad \text{eine Lösungsmatrix}$$

$$W(t) := \det Y(t) \qquad \text{die Wronski-Determinante von } Y(t)$$

Sind $\boldsymbol{y}_1(t), \dots, \boldsymbol{y}_n(t)$ linear unabhängig, so heißt $\big(\boldsymbol{y}_1(t), \dots, \boldsymbol{y}_n(t)\big)$ ein *Fundamentalsystem* (von Lösungen) des DGL-Systems.

Liouville-Formel: $W(t) = W(t_o) \cdot \exp\Big(\int_{t_0}^t \operatorname{Spur} A(s)\, ds\Big)$

Sind also $\boldsymbol{y}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{y}_n(t_0)$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ so bleiben $\boldsymbol{y}_1(t), \dots, \boldsymbol{y}_n()$ linear unabhängig für alle t.

Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten:

$$\boldsymbol{y}'(t) = A \cdot \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$