Prof. Dr. Gregor Fels
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Eine **lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** hat die folgende Gestalt

$$(*) \qquad y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x), \quad a, b, \in \mathbb{R}.$$

Der Lösungsraum der homogenen Gleichung (d.h. $f \equiv 0$) ist ein 2-dimensionaler Vektorraum. Es ist praktisch mit dem Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ für komplexwertige Exponentialfunktionen zu arbeiten:

Komplexe Exponentialfunktion. Für $z = x + iy$ definiert man

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Eigenschaften:

$$e^{w+z} = e^w \cdot e^z$$
$$\frac{d}{dt} e^{wt} = w e^{wt}$$
$$\frac{d}{dt} z(t) = w \cdot z(t) \implies z(t) = c e^{wt}$$

Ein Fundamentalsystem für die homogene lineare DGL $y'' + ay' + by = 0$: Eine Basis $y_1(t), y_2(t)$ des (2-dimensionalen) Lösungsraumes dieser DGL.
Lösungsmethode:
Charakteristische Gleichung aufstellen: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Abhängig von dem Typ der Nullstellen λ_j dieser Gleichung sieht ein Fundamentalsystem folgendermaßen aus:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2, \ \lambda_j \in \mathbb{R} \implies y_1 = e^{\lambda_1 t}, \ y_2 = e^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \implies y_1 = e^{\lambda_1 t}, \ y_2 = t e^{\lambda_1 t}$
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \implies y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \ \ y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$

Lösung der inhomogenen Gleichung: $y'' + ay' + by = f(t)$:
Vollständige Lösung: $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

Partikuläre Lösung: Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DGL. Dann: der Ansatz $y = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$ führt auf

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(t)$$

Mit Hilfe der Cramerschen Formel folgt ($y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$)

$$c_1(t)' = -\frac{y_2(t) f(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t) f(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$
$$y_p(t) = -y_1 \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s) f(s)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} ds + y_2 \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) f(s)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} ds$$

Falls $f(t) = p_m(t) e^{wt}$, dann führt der Ansatz $y_p(t) = t^k P_m(t) e^{wt}$ schneller zum Ziel (mit $k = 0$ falls w keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist, und $k = m > 0$ falls w eine m–fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist).

DGL-systeme erster Ordnung sind Gleichungssysteme

$$(\sharp) \qquad \begin{aligned} x_1'(t) &= v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= v_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definierte $\mathbb{R}^n$–wertige Funktion ist. Die Lösung eines solchen Systems besteht aus (mindestens 1-mal) differenzierbaren Funktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$, definiert auf einem Interval I, die identisch $(\sharp)$ erfüllen.