Trennung der Variablen. Kann eine DGL erster Ordnung in der Gestalt

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

geschrieben werden, so liegt eine DGL mit getrennten Variablen vor.

Satz. Ist die Funktion f stetig auf dem Intervall I_x und die Funktion g stetig auf dem Intervall I_y, so hat das AWP $y(x_o) = y_o$, $x_o \in I_x$ genau eine lokale Lösung (eine einseitige Lösung, falls x_o ein Randpunkt von I_x ist) wenn

- $g(y_o) \neq 0$, oder
- $g(y_o) = 0$ aber $|g(y) - g(y_o)| < c|y - y_o|$ in einer Umgebung von y_o

gilt. Die Lösung ergibt sich im ersten Fall aus der Gleichung

$$\int_{y_o}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_o}^{x} f(r)\, dr$$

Im zweiten Fall gilt $y(x) = \text{const} = y_o$.

Beispiel. $y' = \sqrt{|y(x)|}$: In diesem Fall ist

$$y_a(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } a < x \leq 0 \\ -\frac{(x-a)^2}{4} & \text{für } x \leq a \end{cases}$$

für jedes $a \leq 0$ eine Lösung des AWP $y(0) = 0$.

Lineare DGLn. Eine DGL der Form

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{lh}$$

nennt man eine *lineare DGL* erster Ordnung. Diese DGL heißt homogen, falls $f \equiv 0$ und *inhomogen*, falls $f \not\equiv 0$. Sind y_1, y_2 zwei Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung, so ist auch $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, eine Lösung.

Lösungen der homogenen linearen DGL. Ist $a : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist jede Lösung von (lh) von der Form

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)} \quad \text{wobei} \quad A(x) = \int a(x)\, dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösungen der inhomogenen linearen DGL. Falls $a, f \in C^0(I)$ so ist jede Lösung von (lh) von der Form

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\int_{x_o}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt + c \right)$$

Beweissidee: Variation der Konstanten: Ansatz $y(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ wobei y_h eine nichttriviale Lösung der homogenen linearen DGL ist.

Eine **Bernoulli-DGL** ist eine DGL der folgenden Form:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1$$

Ansatz: Multipliziere beide Seiten mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ und substituiere $z(x) := y(x)^{1-\alpha}$. Dies führt auf die lineare DGL $z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x)$

Die DGL $y' = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ geht nach der Substitution $z(x) := y(x)/x$ in die trennbare DGL

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} \qquad \text{über.}$$