Prof. Dr. Gregor Fels
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Gewöhnliche Differenzialgleichungen.

Eine explizite/implizite Differenzialgleichung der Ordnung n ist ein Ausdruck

$$(*) \qquad y^{(n)}(x) = F(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \qquad \text{bzw.} \qquad G(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

wobei $F : V \to \mathbb{R}$ mit $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen (bzw. $G : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ offen) eine reellwertige Funktion ist.

Eine *Lösung* einer DGL ist eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Interval) welche
- n–mal differenzierbar ist,
- die Bedingung $\{(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x) : x \in I\} \subset U$ (bzw. $\{(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) : x \in I\} \subset V$) erfüllt, und
- der Gleichung $(*)$ genügt.

Eine Lösung einer DGL kann auch implizit angegeben werden als (lokale) Lösung einer impliziten Gleichung $\varphi(x, y) = c$.

Wird zusätzlich zu $(*)$ noch verlangt, dass die Funktion y die Bedingung

$$(**) \qquad y(a) = \eta_0, \quad y'(a) = \eta_1 \ , \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(a) = \eta_{n-1} \quad (y^{(n)}(a) = \eta_n$$

für ein $(a, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) \in V$ (bzw. $(a, \eta_0, \ldots, \eta_n) \in U$) erfüllt, so nennt man $(**)$ eine *Anfangsbedingung* (AB) und die DGL zusammen mit der AB ein *Anfangswertproblem* (AWP).

Grundsätzliche Fragestellungen:
A) Existenz von Lösungen. Bestimmung eines maximalen Definitionsbereiches I
B) Vollständigkeit der Lösungsmenge
C) Eindeutigkeit von Lösungen

Spezielle DGLs erster Ordnung

Exakte Differenzialgleichungen. Eine DGL

$$\text{(ed)} \qquad A(x, y) + B(x, y)y'(x) = 0$$

mit $A, B \in C^0(U)$ heißt *exakt* falls eine Funktion $\varphi \in C^1(U)$ mit $A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ existiert.

<u>Exaktheitstest und Existenz</u>: Man nehme in der obigen DGL an, dass $A, B \in C^1(U)$
Eine notwendige Bedingung, damit (ed) exakt ist, lautet: $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$.
Diese Bedingung ist auch **hinreichend**, falls zusätzlich U sternförmig ist.
(U heißt sternförmig bzgl. $x \in U$ falls für jedes $z \in U$ die Strecke $\overline{xz}$ in U enthalten ist. Es gilt noch allgemeiner: U muss bloß einfach zusammenhängend sein, d.h., jede stetige geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \to U$ läßt sich stetig innerhalb von U zu einer konstanten Punktkurve deformieren.)
Ist die DGL (ed) exakt und $B(x_0, y_0) \neq 0$ so hat das Anfangswertproblem

$$A(x, y) + B(x, y)y'(x) = 0 \qquad y(x_0) = y_0$$

lo kal eindeutige (implizit gegebene) Lösung.
Ist U sternförmig bzgl. $(x_0, y_0) \in U$ so ist die Funktion φ durch das Integral

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 \Big(A(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0)) + B(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0) \Big) \, dt$$

gegeben. (Die Formel ist besonders einfach wenn $(x_0, y_0) = (0, 0)$.)