Satz über implizite Funktionen. Es sei $F : U \times V \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar, wobei $U \subset \mathbb{R}^\ell$, $V \subset \mathbb{R}^q$ offene Teilmengen sind. Weiterhin sei $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in U \times V$ mit $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$. Wenn die Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \Big(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\Big)_{\substack{1\le j\le q\\ 1\le k\le q}}$$

invertierbar ist, gibt es Umgebungen $U' \subset U$ von $\boldsymbol{x}_0$ und $V' \subset V$ von $\boldsymbol{y}_0$ und genau eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U' \to V'$ mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U'$. Es gilt dann

$$D\varphi_{\boldsymbol{x}_0} = -\Big(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$$

In den meisten Anwendungen ist $q = 1$; es wird also eine reellwertige Funktion φ gesucht welche die Gleichung $F(x_1, \ldots, x_\ell, \varphi(x_1, \ldots, x_\ell)) = 0$ löst. Die folgende Aussage ist eine Folgerung aus dem vorhergehenden Satz: Falls die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$ erfüllt ist existieren Umgebungen $U' \subset U$ von $\boldsymbol{x}_0$ und $B_\epsilon(y_0) \subset V$ von y_0 sowie genau eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion $\varphi : U' \to B_\epsilon(y_0) \subset \mathbb{R}$ mit $F(x, \varphi(x)) = 0$. Es gilt ferner

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0)} \qquad j = 1, .., \ell$$

Lokale Extrema. Eine auf einer offenen Menge $U \subset E$ definierte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ hat $a \in U$ ein *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum* falls es eine offene Kugel $B_{\epsilon(a)} \subset U$ um a gibt, so dass $f(x) \geq f(a)$ (bzw. $f(x) \leq f(a)$) für alle $x \in B_\epsilon(a)$ gilt.

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1–Funktion. Ist $a \in U$ eine lokale Extremstelle von f so folgt $Df_a = 0$ (oder $\operatorname{grad} f(a) = 0$).

Diese Bedingung ist i.A. nicht hinreichend für ein lokales Extremum von f.

Extremstellentest mit der Hesse-Matrix Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion. Die Hesse-Matrix von f in $a \in U$ is die $m \times m$ Matrix

$$H_f(a) := \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)\Big)$$

Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass diese Matrix symmetrisch ist. Es macht also Sinn von der Signatur von $H_f(a)$ zu sprechen.

Satz. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion $a \in U$ mit $Df_a = 0$. Angenommen, die Hesse-Matrix $F_f(a)$ ist invertierbar. Dann gilt:

- $H_f(a)$ ist positiv definit (alle Eigenwerte sind positiv) $\Longrightarrow$ f besitzt in a ein lokales Minimum.
- $H_f(a)$ ist negativ definit (alle Eigenwerte sind negativ) $\Longrightarrow$ f besitzt in a ein lokales Maximum.
- $H_f(a)$ hat sowohl negative als auch positive Eigenwerte $\Longrightarrow$ f besitzt in a <u>kein</u> Extremum (a is ein Sattelpunkt)

Spezialfälle von Berechnung der Extrema einer Funktion.
Globales Maximum oder Minimum auf einer kompakten Teilmenge K: Lokale Extrema auf K° + Extrema auf $\operatorname{Rand}(K)$ ($K^\circ =$ Menge der inneren Punkte von K $= \{x \in K : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subset K\}$.)

Extrema mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatorregel
Seien $f : U \to \mathbb{R}$ $g : U \to \mathbb{R}$ zwei Abbildungen. Man sagt, dass f in a ein lokales Extremum (lok. Min. o. lok. Max) unter der Nebenbedingung $g = 0$ hat falls $g(a) = 0$ gilt und es eine offene Kugel $B_\epsilon(a) \subset U$ gibt, so dass $f(x) \geq f(a)$ (bzw. $f(x) \leq f(a)$) für alle $x \in B_\epsilon(a) \cap \{x \in U : g(x) = 0\}$ gilt.

Satz. Es seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei C^1–Funktionen. Ist a ein lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ und gilt $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$, so gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ (ein sog. Lagrange-Multiplikator), so dass

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(a) \qquad \text{gilt.}$$