Berechnung der (totalen) Ableitung. Sei $f : U \to F$ differenzierbar in $z \in U$ und $Df_z : E \to F$ die (totale) Ableitung. Dann exitiert der Grenzwert (Richtungsableitung) $\partial_v f(z)$ für jedes $v \in E$ und es gilt

$$\partial_v f(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z + tv) - f(z)}{t} = Df_z(v)$$

Insbesondere, gilt für $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ die Formel

$$[Df_z]^{\mathcal{K}_n}_{\mathcal{K}_m} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(z)\right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite heißt die *Jacobi-Matrix* von f.

Warnung. Die Jacobi-Matrix auf der rechten Seite mag existieren (d.h., wenn die Funktionen f_j partiell differenzierbar sind), ohne dass f selbst (total) differenzierbar ist. Ist jedoch f total differenzierbar, so ist die Ableitung Df_a eindeutig bestimmt und (bezüglich der kanonischen Basen) durch die Jacobi-Matrix gegeben.

Eigenschaften. Es seien E, F normierte Vektorräume.
- Ist E endlichdimensional und $f : U \to F$ (total) in $a \in U$ differenzierbar, so ist f stetig in a.
- Sind $f, g : U \to F$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ (total) differenzierbar in $a \in U$ dann sind auch $\alpha f + \beta g$ und $\varphi \cdot f$ (total) differenzierbar in a und es gilt

$$D(\alpha f + \beta g)_a = \alpha Df_a + \beta Dg_a$$
$$D(\varphi f)_a = \varphi(a) Df_a + D\varphi_a(\cdot) \cdot f(a).$$

Kettenregel. Es seien E, E', E'' (endlichdimensionale) normierte Vektorräume und $f : U \to E'$ $g : U' \to E''$ differenzierbare Abbildungen mit $f(U) \subset U'$. Dann ist $g \circ f : U \to E''$ differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} \circ Df_a \qquad a \in U$$

Höhere partielle Ableitungen. Ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist $f_{x_j} := \frac{\partial f}{\partial x_j}$ wieder eine $\mathbb{R}$–wertige Funktion $U \to \mathbb{R}$. Also kann ist die Frage nach der partiellen Differenzierbarkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sinnvoll. Dieser Vorgang kann iteriert werden. So läßt sich die k-te partielle Ableitung von f nach $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ definieren. Die Reihenfolge der Differenziation nach x_{j_i} ist wichtig!

$$C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{–fach stetig partiell differenzierbar}\}$$