Prof. Dr. Gregor Fels
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Differenzialrechnung in mehreren Variablen

Allgemeine Voraussetzungen: E, F sind normierte Vektorräume; in den meisten Anwendungen sind $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ oder der Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}$

Berührungsordnung. Sei $U \subset E$ eine offene Menge und $f, g : U \to F$ zwei Abbildungen. f und g berühren sich in $z \in U$ von Ordnung $k \in \mathbb{N}$ falls

$$\lim_{x \to z} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - z\|^k} = 0$$

gilt. D.h., für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung V von z (z.B. $B_\delta(z)$) so dass

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon \|x - z\|^k \qquad \text{für alle } x \in V$$

erfüllt ist. Man schreibt auch $f(x) = g(x) + o(\|x - z\|^k)$.

Die (totale) Ableitung. Es sei $U \subset E$ eine offene Menge und $f : U \to F$ eine Abbildung. Die Funktion f heißt in $z \in U$ (total) differenzierbar falls eine lineare Abbildung $A : E \to F$ existiert, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z) - A(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt. Die Abbildung $A : E \to F$ ist dann eindeutig bestimmt und heißt die (totale) Ableitung von f im Punkte z. Wir schreiben auch Df_z für A. Ander ausgedrückt: die Abbildungen $x \mapsto f(x)$ und $x \mapsto f(z) + A(x - z)$ berühren sich in $x = z$ von Ordnung 1.

Richtungs- und partielle Ableitungen. Sei $f : U \to F$ wie oben und $v \in E$. Dann heisst der Vektor

$$\partial_v f(z) := \frac{\partial f}{\partial v}(z) := \lim_{t \to 0} \frac{f(z + tv) - f(z)}{t}$$

die *Richtungsableitung* von f in z in Richtung v (falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert).

Speziell für $E = \mathbb{R}^m$, die kanonische Basisvektoren $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}$ nennt man die Richtungsableitung

$$\partial_{e_j} f(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z + te_j) - f(z)}{t} = \lim_{x_j \to z_j} \frac{f(z_1, \dots, z_{j-1}, x_j, z_{j+1}, \dots, z_m) - f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_m)}{(x_j - z_j)}$$

die partielle Ableitung nach x_j und schreibt hierfür $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(z)$. Falls in dem Punkt z die partielle Ableitung nach x_j existiert (d.h., dass der Grenzwert auf der rechten Seite vorhanden ist) so heißt f in z nach x_j partiel differenzierbar. Falls alle partiellen Ableitungen nach $x_1, \dots, x_m$ existieren, so nennt man f partiell differenzierbar in z. Ist eine $\mathbb{R}$–wertige Funktion f in allen Punkten $z \in U$ nach x_j partiell differenzierbar, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ wieder eine $\mathbb{R}$–wertige Funktion $U \to \mathbb{R}$.