Prof. Dr. Gregor Fels
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Ein Beispiel: Es sei $\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } x \in [0,\pi] \\ \frac{1}{2}(-\pi - x) & \text{für } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$.

Die Fourierreihe von ϕ ist $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

Konvergenz im quadratischen Mittel. Wie bereits erwähnt, kann der VR $C([-T/2,T/2])$ der stetigen Funktionen auf dem kompaktem Interval $C[-T/2,T/2]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int f(t)\overline{g(t)}\ dt$ ausgestattet werden, also auch mit der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$. Es zeigt sich, dass die $\|\ \|_2$-Konvergenz besser geeignet ist, die Konvergenz von Fourierreihen zu beschreiben als die punktweise oder die gleichmäßige Konvergenz. Die Konvergenz bezüglich der Norm $\|\ \|_2$ nennt man auch die *Konvergenz im quadratischen Mittel*: $\|f_n - f\|_2 \to 0$ ist äquivalent zu $\int_{-T/1}^{T/2} |f_n(t) - t(t)|^2\ dt \to 0$.
Der Vektorraum $C([-T/2,T/2])$ hat jedoch den Nachteil, dass er nicht vollständig ist, d.h., nicht jede $\|\ \|_2$-Cauchy Folge hat einen Grenzwert in $C([-T/2,T/2])$. Wir haben bereits im Zusammenhang mit den Fourierentwicklungen nicht stetige Funktionen (z.B., stückweise stetige Fkt) betrachtet. Wir nehmen einige zusätzlich 'Funktionen' hinzu und "vergrößern" $C([-T/2,T/2])$ zu einem *vollständigen* Vektorraum, den wir $\mathcal{H}$ nennen. Der Vektorraume $\mathcal{H}$ besitzt ebenfalls ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{K}$, so dass $C([-T/2,T/2])$ ein dichter Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist und das Skalarprodukt auf $C([-T/2,T/2])$ die Einschränkung des Skalarproduktes von $\mathcal{H}$ ist. (Eine solche Vervollständigung $(C([-T/2,T/2], \|\ \|_2) \subset \mathcal{H}$ existiert entweder nach dem bereits ohne Beweis zitierten abstrakten Vervollständigungssatz; $\mathcal{H}$ kann aber, unter Verwendung der sog. Lebesgueschen Integrale, auch explizit konstruiert werden. vgl. z.B. ... Die Elemente von $\mathcal{H}$ nennt man auch " L^2–Funktionen")

Sei
$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \qquad u_{2k}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega t \qquad u_{2k-1}(t) := \sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega t \qquad k \geq 1$$
das orthonormale System (in $C([-T/2,T/2] \subset \mathcal{H}$), bestehend aus den normierten trigonometrischen Polynomen (vgl. letzte Vorlesung). Die Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ einer Funktion $f \in C([-T/2,T/2])$ (oder $f \in \mathcal{H}$) und deren Partialsummen, d.h. Fourierpolynome vom Grad N , können dann unter Ausnutzung der Orthonormalität von $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ elegent als
$$\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle\, u_m \qquad \text{bzw,} \qquad \sum_{m=0}^{2N}\langle f,u_m\rangle\, u_m$$
geschrieben werden. (Zum Vergleich $\langle f,u_{2k}\rangle = a_k\sqrt{T/2}$ und $\langle f,u_{2k-1}\rangle = b_k\sqrt{T/2}$.) Bezüglich der Norm $\|\ \|_2$ hat das Fourierpolynom vom Grad N einer jeden Funktion $f \in \mathcal{H}$ (und zwar unabhängig davon ob f stückweise differenzierbar ist oder nicht) die folgende Interpretation:

Minimaler Abstand: Das N–te Fourierpolynom $P_f(t) := \sum_{m=0}^{2N}\langle f,u_m\rangle\, u_m$ von f hat unter allen trigonometrischen Polynomen $\sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m(t)$ vom Grad $\leq N$ den minimalen Abstand zu f , d.h.
$$\|f - P_f\|_2 \leq \|f - P\|_2 \qquad \text{für alle} \qquad P = \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m(t)$$
Beweis: Sei $P(t) = \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m(t)$ ein reelles trigonometrisches Polynom. Dann gilt
$$\begin{aligned}\|f-P\|^2 &= \langle f-P, f-P\rangle = \langle f,f\rangle - 2\langle f,P\rangle + \langle P,P\rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2\langle f, \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m\rangle + \langle \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m, \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m u_m\rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{m=0}^{2N}\gamma_m\langle f,u_m\rangle + \sum_{m,n=0}^{2N}\gamma_m\gamma_n\langle u_m,u_n\rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{2N}2\gamma_m\langle f,u_m\rangle + \sum_{m=0}^{2N}\gamma_m^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{2N}\langle f,u_m\rangle^2 + \sum_{m=0}^{2N}\left(\gamma_m - \langle f,u_m\rangle\right)^2\end{aligned}$$
und daher ist $\|f - P\|$ genau dann minimal wenn $\gamma_m = \langle f,u_m\rangle$ für alle $m = 0,1,\ldots,2N$ gilt. □

Aus den Gleichungen in den obigen Beweis folgt:

Besselsche Gleichung. $$\Big\|f-\sum_{m=0}^{k}\langle f,u_m\rangle u_m\Big\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{m=0}^{k}|\langle f,u_m\rangle|^2$$

Insbesondere folgt aus der obigen Gleichung die Ungleichung $\sum_{m=0}^{k}|\langle f,u_m\rangle|^2\le\sum_{m=0}^{\infty}|\langle f,u_m\rangle|^2\le\|f\|_2^2$. Diese sog. Besselsche Ungleichung erlaubt einen Rückschluss auf das Summationsverhalten der Fourierkoeffizienten: Da die Summen

$$\sum_{m=0}^{2N}|\langle f,u_m\rangle|^2=T\Big(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2)\Big)$$

durch $\|f\|^2$ von oben beschränkt sind, konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty}|\langle f,u_m\rangle|^2$ absolut. Insbesondere $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{k\to\infty}\langle f,u_m\rangle=0$ und natürlich für jedes $\epsilon>0$ gibt es ein K, so dass für alle $m,n\ge K$

$$(\star)\qquad\sum_{k=m}^{n}|\langle f,u_m\rangle|^2<\epsilon$$

Dieses technisches Resultat benötigen wir in dem Beweis des Hauptsatzes.

Wir nähern uns der Antwort eines zentralen Problems der Fouriertheorie: Konvergenz der Fourierreihe $\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle u_m$ von f. Es gilt nämlich der

Hauptsatz der Fouriertheorie. Die Fourierreihe $\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle u_m$ jeder 'Funktion' $f\in\mathcal{H}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|f-\sum_{m=0}^{N}\langle f,u_m\rangle u_m\Big\|_2=0\qquad\text{und}\qquad\|f\|_2^2=\sum_{m=0}^{\infty}|\langle f,u_m\rangle|^2$$

Beweisskizze. Zunächstmal zeigt man, dass die Folge der Partialsummen $S_N=\sum_{m=0}^{N}\langle f,u_m\rangle u_m$ in $\mathcal{H}$ konvergiert: Dazu zeigt man, dass (S_N) eine Cauchy-Folge ist:

$$\|\sum_{m=k}^{\ell}\langle f,u_m\rangle u_m\|^2=\sum_{m=k}^{\ell}\|\langle f,u_m\rangle u_m\|^2=\sum_{m=k}^{\ell}\langle f,u_m\rangle^2<\epsilon$$

wenn nur $k,\ell\ge K$, vergleiche $(\star)$. An dieser Stelle braucht man die Vollständigkeit von $\mathcal{H}$: Die Cauchy-Folge $S_N=\sum_{m=0}^{N}\langle f,u_m\rangle u_m$ konvergiert gegen ein Element $s\in\mathcal{H}$. Damit ist bewiesen, dass die Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen eine 'Funktion' in $\mathcal{H}$ konvergiert. Natürlich würde man geren wissen, ob f und s übereinstimmen: Aus der Konstruktion von s folgert man

$$\langle f-s,u_k\rangle=0\qquad\text{für alle}\quad u_k$$

d.h., $f-s$ ist orthogonal zu allen trigonometrischen Polynomen $u_k(t)$. Die entscheidende und nicht trivial zu beweisende Eigenschaft der orthonormalen Folge u_k ist, dass $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bereits <u>maximal</u> ist, d.h.:

$(\star\star)$ *Gilt für ein Element $\psi\in\mathcal{H}$ $\langle\psi,u_k\rangle=0$ für alle $k=0,1,\ldots$ dann muss $\psi=0$ sein*

Akzeptiert man $(\star\star)$, so folgt aus dem Obigen, dass $s=f$ ist und damit ist die erste Aussage des Hauptsatzes bewiesen. Die letzte Gleichung ist eine unmittelbare Konsequenz der ersten Aussage: Da jetzt $f=\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle u_m$ in dem normierten Vektorraum $(\mathcal{H},\|\ \|_2)$ gilt, so berechnet man unter Verwendung der Orthonormalität von (u_m):

$$\|f\|^2=\Big\langle\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle u_m\ ,\ \sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle u_m\Big\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,u_m\rangle^2=\sum_{m=0}^{\infty}|\langle f,u_m\rangle|^2$$