Orthogonalitätsrelationen.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 k\omega t\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 k\omega t\, dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega t \cos m\omega t\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega t \sin m\omega t\, dt = 0 \quad m \neq k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega t \sin m\omega t\, dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t}\overline{e^{im\omega t}}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t}e^{-im\omega t}\, dt = \begin{cases} T & \text{if } k = m \\ 0 & \text{if } k \neq m \end{cases}$$

Also bildet die Familie

$$u_0(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} \qquad u_{2k}(t) := \sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega t \qquad u_{2k-1}(t) := \sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega t \qquad k \geq 1$$

bzw. $$\psi_k(t) := \sqrt{\frac{1}{T}}\, e^{ik\omega t}$$

ein orthonormales System in dem euklidischen/Hermiteschen Vektorraum

$$\mathcal{H} := C([-T/2, T/2]) \qquad \langle f, g\rangle := \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

Angenommen $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ konvergiert gleichmäßig gegen $s : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a_k = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_N(t)\cos k\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos k\omega t\, dt$$

$$b_k = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_N(t)\sin k\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin k\omega t\, dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, dt$$

Das obige Resultat motiviert die folgende Definition: Gegeben sei eine Funktion $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{K}$. Dann heißt $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ *die Fourierreihe von* f falls die Koeffizienten die Bedingungen

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\, dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\, dt$$

erfüllen.

BEM. Die obigen Integrale ändern sich nicht wenn man die Funktion f in endlich vielen Punkten beliebig abändert.

In welchem Sinn konvergiert eine Fourierreihe von f ?

Vorbereitung: Nur für Funktionen, die in gewissem Sinn 'regulär' sind, konvergiert die ensprechende Fourierreihe punkweise oder gleichmäßig. Diese Bedingungen sind etwas technischer Natur:

Eine Funktion $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{K}$ heißt *stückweise stetig* falls eine Zerlegung $-T/2 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = T/2$ von $[-T/2, T/2]$ existiert, so dass alle Einschränkungen $f|_{(\xi_k, \xi_{k+1})}$, $k = 0, \ldots, m-1$, stetig sind und sich stetig auf die entsprechende abgeschlossene Intervalle $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ fortsetzten lassen (d.h., $\lim_{y\searrow\xi_k}(f(y))$ und $\lim_{y\nearrow\xi_{k+1}}(f(y))$ existieren).

Eine Funktion $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{K}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar* falls es eine Zerlegung $-T/2 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = T/2$ gibt, so dass alle Einschränkungen $f|_{(\xi_k, \xi_{k+1})}$ stetig differenzierbar sind und die Ableitungen $f'|_{(\xi_k, \xi_{k+1})}$ sich stetig auf die entsprechende abgeschlossese Intervalle $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ fortsetzten lassen.

Ohne Beweis notieren wir:

Dirichletsche Regel (punktweise Konvergenz). Sei $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{K}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion, die wir periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt denken. Dann konvergiert ihre Fourierreihe in $x \in$

$[-T/2, T/2]$ gegen

$$s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

wobei $f(x+) := \lim_{y \searrow x} f(y)$ und $f(x-) := \lim_{y \nearrow x} f(y)$.

Gleichmäßige Konvergenz. Sei $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig differenzierbar und zusätzlich stetig auf (a, b) . Dann konvergiert die Fourierreihe von f auf jedem kompakten Teilintervall von (a, b) gleichmäßig gegen f .

Ein Beispiel: Es sei $\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } x \in [0, \pi] \\ \frac{1}{2}(-\pi - x) & \text{für } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$.

Die Fourierreihe von ϕ ist $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$