Prof. Dr. Gregor Fels
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Taylor-Formel. Sei $f : (c-r, c+r) \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt für $x \in (c-r, c+r)$:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_f^{n+1}(x,c)$$

wobei

$$R_f^{n+1}(x,c) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad \begin{cases} c < \xi < x & \text{falls } x > c \\ x < \xi < c & \text{falls } x < c \end{cases} \quad \text{(Lagrange)}$$

$$= \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \qquad \text{(Cauchy)}$$

Meist braucht man nur die Abschätzung: $|R_f^{n+1}(x,c)| \le \dfrac{M \cdot |x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$ mit

$$M = \sup\{|f^{(n+1)}(\xi)| : \xi \text{ zwischen } x \text{ und } c\}$$

Extremwerte-Test. Sei $f \in C^k(a,b)$ (d.h., $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ is k–fach differenzierbar und die k–te Ableitung ist stetig) und $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0\,,\ f^{(k)}(c) \neq 0\,.$$

Dann gilt:
(i) k gerade, $f^{(k)}(c) < 0 \implies f(c)$ ist ein lokales Maximum von f
(ii) k gerade, $f^{(k)}(c) > 0 \implies f(c)$ ist ein lokales Minimum von f
(iii) k ungerade $\implies f(c)$ ist <u>kein</u> lokales Extremum

Methoden der Reihenentwicklung
- Taylorreihe + Abschätzung des Restgliedes $R_f^n(x,c)$
- Bekannte Reihen differenzieren und integrieren.
- Algebraische Kombination von bekannten Reihenentwicklungen.
- Reihen in Reihen einsetzen.

Fourierreihen, Fourierpolynome.
Ein (reelles) Fourierpolynom auf dem Interval $[-T/2, T/2]$ ein Ausdruck

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \qquad \omega := \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{komplexe Version:} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i\omega kt}$$

Eine ree lle Fourierreihe ist ein Ausdruck

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

$$\text{komplexe Version:} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}$$