Konvergenzradius. Für jede Potenzreihe gibt es eine reelle Zahl $R \geq 0$, genannt der *Konvergenzradius* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$, so dass

- Für jedes $w \in \mathbb{K}$ mit $|w-z_o| > R$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_o)^n$ divergent.
- Für jedes $w \in \mathbb{K}$ mit $|w-z_o| < R$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_o)^n$ absolut.
- Gegeben ein r, schreibe $a_n(z-z_o)^n|_{\overline{B}_r}$ für die Funktionen $\overline{B}_r(z_o) \to \mathbb{K}$, $z \mapsto a_n(z-z_o)^n$. Für jedes $r < R$

konvergiert die Folge der Partialsummen $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n|_{\overline{B}_r}$ gleichmäßig (gegen eine stetige Funktion $\varphi : \overline{B}_r(z_o) \to \mathbb{K}$)

Wir schreiben dann $\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ für die durch die Reihe definierte stetige Funktion auf $B_R(z_o)$.

Es läßt sich keine allgemeine Aussage über die Konvergenz in den Punkten z mit $|z-z_o| = R$ machen. Es gilt aber der **Abelsche Grenzwertsatz:**
Konvergiert $f(z) := \sum a_n(z-z_0)^n$ in z mit $|z-z_o| = R$, so gilt $\lim\limits_{t\nearrow 1} f(t(z-z_o)+z_o) = f(z)$, ($t \in \mathbb{R}_{>0}$).

Berechnung des Konvergenzradius. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ eine Potenzreihe und R deren Konvergenzradius. Dann gilt

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \geq n\})}$$

($R = 0$ falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ und $R = \infty$ falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)

Die folgenden Formeln sind oft nützlich bei der Berechnung des Konvergenzradius:

- Gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und existiert $\lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ so gilt $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.
- $R = \sup\{r \geq 0 :$ die Folge $(|a_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\}$

Identitätssatz.
Seien $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$, $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_o)^n$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien R_a und R_b. Sei weiter (p_n) eine Folge aus $B_r(z_o) \setminus \{z_o\}$, $r \leq \min\{R_a, R_b\}$, so dass $\lim p_n = z_o$. Angenommen $f(p_k) = g(p_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a_j = b_j$ für alle j und $f(z) = g(z)$ für alle $z \in B_{R_a}(z_o)$.

Ableitung und Integration von Potenzreihen. Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f : B_R(0) \to \mathbb{K}$ die durch die Reihe definierte stetige Funktion. Dann

- $f'(z) = \sum (a_n z^n)' = \sum (m+1)a_{m+1}z^m$, und der Konvergenzradius der Reihe $\sum (m+1)a_m z^m$ ist gleich R. Insbesondere ist f unendlich oft differenzierbar.
- $\displaystyle\int_0^y f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y (a_n z^n)\,dz = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m z^{m+1}}{m+1} \qquad y \in B_R(z_o)$

Taylor-Reihen. Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine ∞–oft differenzierbare Funktion und $c \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =: T_f(x)$$

die *Taylorreihe* von f mit Entwicklungspunkt c. Das Polynom $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ heißt das Taylor-Polynom (von f) vom Grad n.
I.a., konvergiert die T-Reihe nicht (d.h. $R = 0$). Auch wenn die Taylorreihe von f konvergiert, so müssen die Funktionen $T_f(x)$ und $f(x)$ nicht in einer Umgebung von c übereinstimmen.