Prof. Dr. Gregor Fels,
Fachbereich Mathematik, TU-Darmstadt

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Norm auf V ist eine Funktion $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die folgende Bedingungen erfüllt:
N1. $\|v\| = 0$ impliziert $v = 0$
N2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$
N3. DREIECKSUNGLEICHUNG $\qquad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall\, v, w \in V$

$(V, \| \ \|)$ heißt dann ein *normierter Vektorraum.*

Eine Funktion $\nu : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die nur (N2) und (N3) erfüllt, heißt eine *Seminorm* auf V .

HAUPTBEISPIELE:
(a) $V = \mathbb{K}$ $\|z\| = |z|$
(b) $V = \mathbb{K}^n$, $\|z\| = |z_1| + \cdots + |z_n|$
(c) $V = \mathbb{K}^n$, $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$
(d) $V = \mathbb{K}^n$, $\|z\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$
(e) $V = C_b(X)$ VR der beschränkten stetigen Funktionen auf X , $\quad \|f\| := \|f\|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$

Die Menge $B_r(z) = \{v \in V : \|v - z\| < r\}$ heißt die *offene Kugel mit Radius* $r > 0$ *und Mittelpunkt* z .
$\overline{B}_r(z) = \{v \in V : \|v - z\| \leq r\}$ heißt die *abgeschlossene Kugel mit Radius* $r > 0$ *und Mittelpunkt* z .

Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *offen*, wenn für jedes $z \in U$ eine offene Kugel $B_r(z)$ existiert, so dass $B_r(z) \subset U$ gilt. Eine offene *Umgebung* eines Punktes $z \in V$ nennt man eine beliebige offene Teilmenge, die z enthält.

Def. der Konvergenz: Eine Folge (v_n) in V konvergiert gegen $w \in V$ genau dann wenn $\|v_n - w\|$ gegen 0 konvergiert. Anders ausgedrückt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $v_n \in B_\epsilon(w)$ für alle $n \geq N_\epsilon$.

Sei $X \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $f : X \to \mathbb{K}$ *stetig* [in y] die Gleichung falls für jede in X konvergente Folge (x_n) [mit $\lim x_n = y$],

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \quad [= f(y)]$$

erfüllt ist.

BEM.: Die Normfunktion $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ ist stetig. Jede polynomiale Funktion $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist stetig.

Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt *abgeschlossen*, wenn $V \setminus A$ offen ist.
Eine Teilmenge $A \subset V$ ist genau dann abgeschlossen wenn sie die folgende Eigeschaft hat:
Der Grenzwert $v = \lim_{n\to\infty} a_n \in V$ jeder konvergenten Folge (a_n) aus A ist ein Element in A.

Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Eine Teilmenge $K \subset V$ heißt *kompakt*, wenn jede Folge (k_n) von Elementen aus K eine konvergente Teilfolge (k_{n_ℓ}) besitzt, so dass $x = \lim_{\ell\to\infty} k_{n_\ell} \in K$ gilt.

Anwendung: Sei $K \subset V$ kompakt und $f : K \to \mathbb{K}$ eine stetige Fkt. Dann ist f beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in K$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $(V, \| \ \|)$ heißt Cauchy-Folge falls für jedes (noch so kleines) $\epsilon > 0$ ein $N = N_\epsilon$ existiert so dass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt.

Ein normierter Vektorraum $(V, \| \ \|)$, der noch zusätzlich *vollständig* ist, d.h., dass jede Cauchy-Folge (v_n) aus V gegen ein $v \in V$ konvergiert, heißt ein *Banach* Raum.

Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge $M \subset V$ ist die kleinste abgeschlossene Menge $A \subset V$, die M enthält. Die Menge $\overline{M}$ ist die Menge der Häufungspunkte von M , d.h., $\overline{M} = \{z \in V : \exists\, (v_n),\ v_n \in M \text{ mit } z = \lim_{n\to\infty} v_n\}$.

M heißt *dicht* in V falls $\overline{M} = V$ gilt. Z.B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Für die Entwicklung in eine Fourierreihe ist die folgende Existenzaussage hilfreich:
Vervollständigung. Für jeden normierten Vektorraum $(V, \| \ \|)$ existiert ein vollständiger normierter Vektorraum $(\widehat{V}, \| \ \|^\wedge)$ und eine lineare injektive Abbildung $\iota : V \hookrightarrow \widehat{V}$, so dass $\overline{\iota(V)} = \widehat{V}$, $\quad \|\iota(u)\|^\wedge = \|u\|$ für alle $u \in V$.

Alle Beispiele (a)-(e) sind Banachräume (d.h. vollständig).

Der Vektorraum $V = C([a, b])$ (VR der stetigen Funktionen auf dem Interval $[a, b]$) mit der Norm $\|f\| := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$ ist ein normierter VR, der <u>nicht</u> vollständig ist.

Potenzreihen (in einer Variable) sind unendliche Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ mit $a_n \in \mathbb{K}$. Solche Reihen können sowohl als Reihen von Zahlen (d.h. für feste $z \in \mathbb{K}$) als auch als Reihen von (polynomialen) Funktionen $z \mapsto a_n(z - z_o)^n$ betrachtet werden. Hierbei heißt z_o der Mittelpunkt der Reihenentwicklung. O.B.d.A. $z_o = 0$

$$\text{KonvergenzMenge}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = \{z \in \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$$

Sei $w \in \mathbb{K}$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ für jedes $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < |w|$.