Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 13. August 2007

Mathe II

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Trennung der Variablen

Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL $y'(x) = y(x)^n$.

LÖSUNG:

Für $n = 0$ gilt $y' = 1$ und es folgt $y(x) = x + c$.
Für $n \neq 0$ erhalten Wir $\frac{y'}{y^n} = 1$. Integration (nach x) liefert

$$\begin{array}{llll} \frac{y^{1-n}}{1-n} = x + c & \text{bzw.} & y(x) = [(1-n)(x+c)]^{\frac{1}{1-n}} & \text{für } n \neq 1 \\ \ln y = x + c & \text{bzw.} & y(x) = \exp(x+c) & \text{für } n = 1. \end{array}$$

(G 2)

Wir betrachten die homogene DGL $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ mit den konstanten Koeffizienten b und c.

(a) Erraten Sie für $b = 0$ und $c = 1$ zwei unabhängige Lösungen.
(b) Lösen Sie für $b = 3$ und $c = 2$ obige DGL mit dem Ansatz $y(x) = \exp(\lambda x)$.
(c) Wie können Sie die in a) erratenen Lösungen mit dem Lösungsverfahren aus b) erhalten?

LÖSUNG:

(a) Für $b = 0$ und $c = 1$ sind sin und cos zwei unabhängige Lösungen.
(b) Setzt man $y(x) = \exp(\lambda x)$ in die DGL ein, so erhält man $\lambda^2 \exp(\lambda x) + \lambda b \exp(\lambda x) + c \exp(\lambda x) = 0$. Durch Kürzen mit $\exp(\lambda x)$ erhält man $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Für $b = 3$ und $c = 2$ ergeben sich die Lösungen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Somit sind die Funktionen $g(x) = e^x$ und $h(x) = e^{2x}$ die gesuchten Lösungen der DGL.
(c) Mit dem Lösungsverfahren aus b) erhält man $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die Lösungen wären demnach $g(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $h(x) = e^{-ix} = \cos -x + i \sin -x = \cos x - i \sin x$. Hiermit erhält man die Lösungen $\cos x = g(x) + h(x)$ und $\sin x = -i(g(x) - h(x))$.

(G 3)

Finden Sie alle Lösungen der DGL $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$.

Hinweis: Sie können wie in G2 b) vorgehen.

LÖSUNG:

Analog zu G2 b) erhält man die Gleichung $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)(\lambda^2-4) = 0$. Somit folgt $\lambda_{1,2,3,4} = \in \{-2,-1,1,2\}$ und die 4 Lösungen sind $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ $(1 \le i \le 4)$.

(G 4) Wronski-Determinante

Entscheiden Sie ob und in welchen Fällen die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n sein können.

(a) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$

(b) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^5$

(c) $y_1(x) = \sin^2 x$, $y_2(x) = 2\cos^2 x$, $y_3(x) = 3$

LÖSUNG:

(a) $\det W(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also können die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.

(b) $\det W(x) = 12x^5$, das heißt die Funktioenen können ein Funadamentalsystem bilden, wenn das Gebiet nicht die 0 enthält.

(c) $y_3 = 3y_1 + \frac{3}{2}y_2$, also können die Funktionen kein Fundamentalsystem bilden.

(G 5) Variation der Konstanten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned}$$

Hinweis: Sie können die Identität $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ verwenden.

LÖSUNG:

Die Lösung der homogenen DGL

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x - y_2(0)\sin x \\ y_2(0)\cos x + y_1(0)\sin x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Variation der Konstanten folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right]\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt\right) \\
&= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt\right) \\
&= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} tsint \\ t\cos t \end{pmatrix} dt\right) \\
&= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sinx - x\cos x \\ x\sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x - y_2(0)\sin x \\ y_2(0)\cos x + y_1(0)\sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x - x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x + (1 - y_2(0))\sin x - x \\ (y_2(0) - 1)\cos x + y_1(0)\sin x + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(G 6) Reduktion der Ordnung

Es soll die DGL $x^2y'' - xy' + y = 0$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ gelöst werden.

(a) Erraten Sie eine Lösung y_1 der DGL.

(b) Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der DGL.

LÖSUNG:

(a) Die Funktion $y_1(x) = x$ ist eine Lösung.

(b) Wir machen den Ansatz $y = xu$, also ist $y' = u + xu'$ und $y'' = 2u' + xu''$. Das wird in die DGL eingesetzt und wir erhalten

$$\begin{aligned}
x^2y'' - xy' + y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(2u' + xu'') - x(u + xu') + xu = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u''x^3 + u'(2x^2 - x^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u''x + u' = 0 \quad \text{wegen } x > 0.
\end{aligned}$$

Die Substitution $v = u'$ liefert die DGL $v'x + v = 0$. Mit Trennung der Variablen erhält man

$$\ln v = \int \frac{1}{v} = -\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Es folgt $v(x) = \frac{1}{x}$ und somit $u = \ln x$, also $y_2 = x \ln x$. Man rechnet nach, dass y_2 die DGL erfüllt. Dass y_2 unabhängig von y_1 ist, ist klar.

Hausübungen

(A 38) Zum Aufwärmen (10 Punkte)

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0$, $y(1) = 1$ (b) $y' = y^2 + 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ (c) $y' + y - x^2 = 0$, $y(0) = 10$

LÖSUNG:

(a) $y' = \frac{-(1+x)}{x}y. \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y - \ln y_0 = -x + x_0 - \ln x + \ln x_0 \Rightarrow y(x) = \frac{e^{1-x}}{x}.$

(b) $y' = y^2+1 \to \frac{y'}{1+y^2} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{y} \frac{t'}{1+t^2}\,dt = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctan y + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow y(x) = \tan(x - \frac{\pi}{2})$.

(c) Die Lösung der homogenen DGL $y' + y = 0$ ist $y_h(x) = e^{-x}$. Variation der Konstante c ergibt $c(x) = (k + x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)$. Es folgt $y(x) = 8e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

(A 39) (10 Punkte)

Für $x > 0$ sei die Dgl.

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden. Berechnen Sie sodann die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

LÖSUNG:

Die Funktionen y_1 und y_2 lösen die homogene Gleichung (einsetzen) und bilden ein Fundamentalsystem, denn $\det W(y_1, y_2) = 2x(x+1) > 0$ für $x > 0$. Da die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. also durch $y_h = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ gegeben ist, suchen wir Lösungen der inhomogenen Dgl. in der Form $y_{ih} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$ (Variation der Konstanten). Einsetzen in die Dgl. ergibt das lineare Gleichungssystem für c_1', c_2':

$$\begin{pmatrix} (x+1)^2 & x^2 \\ 2(x+1) & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{x+1} \\ 1 + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Integration ergibt:

$$c_1(x) = -x + \ln(x+1) + d_1, \qquad c_2(x) = x + \ln x + d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

Also lautet die allgemeine Lösung

$$y_{ih}(x) = (-x + \ln(x+1) + d_1)\,(x+1)^2 + (x + \ln x + d_2)\,x^2.$$

(A 40) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

LÖSUNG:

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2)$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Mit dem Gaußalgorithmus ergeben sich die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist $\mathbf{y}(x) = e^x \mathbf{v}_1 + e^{\sqrt{2}x} \mathbf{v}_2 + e^{-\sqrt{2}x} \mathbf{v}_3$.