Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 18. Juli 2007

Mathe II

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Sternförmige Mengen und exakte DGLen

Ein **sternförmiges** Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Gebiet, das einen festen Punkt $z \in G$ besitzt, so dass die gerade Strecke von z zu jedem anderen Punkt von G noch vollständig in G liegt. Zum Beispiel ist der $\mathbb{R}^2$ sternförmig (wähle z.B. $z = (0,0)$) oder ein Kreis mit Mittelpunkt z oder eben ein „echter“ Stern. Ein nicht-sternförmiges Gebiet ist z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ oder ein „Autoreifen“.

Eine DGL der Form

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0 \tag{1}$$

für stetige Funktionen $A, B : G \to \mathbb{R}$ heißt **exakt**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $U : G \to \mathbb{R}$ gibt mit $\frac{\partial U}{\partial x} = A$ und $\frac{\partial U}{\partial y} = B$. In diesem Fall kann man das AWP

$$\begin{aligned} A(x,y) + B(x,y) \cdot y' &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

für $(x_0, y_0) \in G$ lokal eindeutig lösen durch Gleichsetzen $U(x,y) = U(x_0,y_0)$ und Auflösen nach y, falls das möglich ist. In diesem Fall heißt U eine **Stammfunktion** der DGL (1).

Ob eine DGL exakt ist, lässt sich folgendermaßen erkennen:

Satz: Ist G sternförmiges Gebiet und gilt für die DGL (1) die Bedingung $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, so ist die DGL exakt.

(a) Sei $G = (0,\infty) \times (0,\infty)$, seien $A(x,y) = \frac{2x}{y^3}$ und $B(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ auf G und sei $(x_0,y_0) = (1,1)$. Begründen Sie, warum in diesem Fall die DGL (1) exakt ist und lösen Sie das AWP (2).

(b) Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, seien $A(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ und $B(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ auf G und sei $(x_0,y_0) = (1,1)$. Rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ gilt. Haben wir in diesem Fall eine exakte DGL?

LÖSUNG:

(a) G ist der erste Quadrant im $\mathbb{R}^2$, also sternförmig. Außerdem gilt

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x \cdot 3y^2}{y^6} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y).$$

Somit haben wir es mit einer exakten DGL zu tun. Um das zugehörige AWP zu lösen, müssen wir eine Stammfunktion U bestimmen. Dazu integrieren wir zunächst A unbestimmt nach x:

$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx = \int \frac{2x}{y^3}\,dx = \frac{x^2}{y^3} + c(y).$$

Um c und somit auch U zu bestimmen, leiten wir U nach y ab und setzen mit B gleich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \frac{-3x^2y^2}{y^6} + c'(y) = \frac{-3x^2}{y^4} + c'(y) \stackrel{!}{=} \frac{y^2-3x^2}{y^4}\\ \Longrightarrow\; c'(y) &= \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{y^2}.\end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir c' unbestimmt nach y und erhalten damit eine Möglichkeit für c, z.B. $c(y) = \frac{-1}{y}$, also auch eine Möglichkeit für U, nämlich z.B.

$$U(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}.$$

Nun setzen wir $U(x,y) = U(x_0,y_0)$, also haben wir

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = \frac{1}{1} - 1 \implies \frac{x^2}{y^3} = \frac{1}{y} \implies x^2 = y^2.$$

Weil wir uns nur im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ aufhalten, heißt unsere eindeutige Lösung $y(x) = x$.

(b) Es gilt

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y).$$

Da die Funktionen A, B nur auf dem nicht-sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert sind, sagt uns obige Gleichung noch nichts über die mögliche Exaktheit der DGL. Man kann sogar zeigen, dass es auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ keine Stammfunktion der DGL geben kann. Beschränkt man sich aber auf sternförmige Teilgebiete, so ist die DGL auf diesen exakt und eindeutig lösbar.

(G 2) Trennbare DGLen

Eine DGL der Form

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{3}$$

für auf Intervallen definierte stetige Funktionen f, g heißt **trennbar** und das zugehörige AWP

$$\begin{aligned} y' &= f(x)\cdot g(y)\\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

lässt sich, falls $g(y_0) \neq 0$, lokal eindeutig lösen durch

$$\begin{aligned} y' = f(x)\cdot g(y) \implies \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) &\implies \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx\\ \implies \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta &= \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

und Auflösen nach y, falls das möglich ist.

(a) Lösen Sie das AWP (4) für $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = 1 + y^2$ und $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(b) Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned} (1+e^x)\cdot y \cdot y' &= e^x \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

(a) $g(y_0) \neq 0$ ist offensichtlich erfüllt. Wir rechnen:

$$\int_0^y \frac{1}{1+\eta^2}\,d\eta = \int_1^x \frac{1}{\xi}\,d\xi \implies \arctan(y) - \arctan(0) = \log(x) - \log(1)$$
$$\implies \arctan(y) = \log(x) \implies y = \tan(\log(x)).$$

(b) Wir formen die DGL folgendermaßen um:

$$(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x \implies y' = \frac{e^x}{(1+e^x)\cdot y} = \frac{e^x}{1+e^x}\cdot\frac{1}{y}.$$

Also ist $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ und $g(y) = \frac{1}{y}$ und $g(y_0) = 1 \neq 0$. Dann haben wir:

$$\int_1^y \frac{1}{\frac{1}{\eta}}\,d\eta = \int_0^x \frac{e^\xi}{1+e^\xi}\,d\xi \implies \int_1^y \eta\,d\eta = \int_0^x \frac{(1+e^\xi)'}{1+e^\xi}\,d\xi$$
$$\implies \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = \log(1+e^x) - \log(1+e^0) \implies y^2 = 2\left(\frac{1}{2} + \log(1+e^x) - \log 2\right)$$
$$\implies y = \sqrt{1 + 2\log\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}.$$

Diese Lösung ist definiert, solange

$$1 + 2\log\left(\frac{1+e^x}{2}\right) > 0 \iff \log\left(\frac{1+e^x}{2}\right) > \frac{-1}{2} \iff \frac{1+e^x}{2} > e^{\frac{-1}{2}}$$
$$\iff e^x > 2e^{\frac{-1}{2}} - 1 \iff x > \underbrace{\log\left(2e^{\frac{-1}{2}} - 1\right)}_{=-0.671495...}.$$

Also ist die Lösung für alle $x > 0$ definiert.

(G 3) Lineare DGLen und Variation der Konstanten

Eine DGL der Form

$$y' + a(x)\cdot y = f(x) \tag{5}$$

für auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktionen a, f heißt **lineare DGL 1. Ordnung** und das zugehörige AWP

$$\begin{aligned} y' + a(x)\cdot y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

lässt sich für *beliebige* y_0 auf dem ganzen Intervall I *global* eindeutig lösen durch

$$y(x) = e^{-A(x)}\cdot\left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(\xi)} f(\xi)\,d\xi\right), \text{ wobei } A(x) := \int_{x_0}^x a(t)\,dt.$$

(a) Lösen Sie das AWP $y' = c$; $y(x_0) = y_0$ für allgemeine feste $c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Lösen Sie das AWP $y' + 5y = 10x + e^{-5x}$; $y(0) = 0$.

LÖSUNG:

(a) Es ist $a(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist auch $A(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt: $y(x) = 1 \cdot (y_0 + \int_{x_0}^{x} (1 \cdot c)\, d\xi) = y_0 + c(x - x_0)$.

(b) Es ist $a(x) = 5$, also ist $A(x) = \int_0^x 5\, dt = 5x$ und es ist $f(x) = 10x + e^{-5x}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-5x} \cdot \left(0 + \int_0^x e^{5\xi}\left(10\xi + e^{-5\xi}\right) d\xi\right) = e^{-5x} \cdot \left(\int_0^x 10\xi e^{5\xi}\, d\xi + \int_0^x 1\, d\xi\right) \\ &= e^{-5x} \cdot \left(\left[2e^{5\xi}\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\right]_0^x + x\right) = e^{-5x} \cdot \left(2e^{5x}\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5} + x\right) \\ &= 2\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{2 + 5x}{5e^{5x}}. \end{aligned}$$

(G 4) Extremwertaufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 3y^2 - 10$, die es auf der Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x, y) \leq 0 \right\}$$

mit

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$$

zu minimieren und zu maximieren gilt.

(a) Um was für eine Menge handelt es sich anschaulich bei M? Warum *muss* die Funktion f auf M sowohl ein Maximum als auch ein Minimum annehmen?

(b) Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f auf M. Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor: Minimieren Sie f auf der offenen Menge $M^\circ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) < 0 \}$ und dann auf der Menge $\partial M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0 \}$.

LÖSUNG:

(a) Die Menge M ist eine Ellipse inklusive ihrem Inneren im $\mathbb{R}^2$. Sie ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt und die stetige Funktion f nimmt daher auf ihr Maximum und Minimum an.

(b) Um f auf M° zu bestimmen gehen wir vor, wie bei jeder Extremwertaufgabe auf offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$: Wir bestimmen den Gradienten ∇f, betrachten die Nullstellen von ∇f und betrachten an diesen Stellen die Hesse-Matrix $\mathcal{H}_f$.

Es ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x + 6y \end{pmatrix}$, also ist $\nabla f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $2x - 2y = 0$ und $-2x + 6y = 0$ gelten, aber dann muss $-2y + 6y = 0$ sein, also $y = 0$ und daher auch $x = 0$. Die Hesse-Matrix ist $\mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass die Hesse-Matrix unabhängig von (x, y) diesen Wert annimt, also auch für $(x, y) = (0, 0)$. Die Hesse-Matrix $\mathcal{H}_f(0, 0)$ ist positiv definit, da die Hauptabschnittsunterdeterminanten positiv sind:

$$\det(2) = 2 > 0 \text{ und } \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0.$$

Somit liegt in $(0,0)$ ein Minimum der Funktion vor, der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(0,0) = -10$. Somit ist auch klar, dass das Maximum von f auf M auf dem Rand ∂M angenommen wird.

Die Extremwerte von f auf ∂M zu bestimmen, ist eine Extremwertberechnung unter einer Nebenbedingung, nämlich unter $g(x,y) = 0$. Wir konstruieren die Hilfsfunktion $L := f - \lambda g$, also $L(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 10 - \lambda x^2 - 2\lambda y^2 + \lambda$ und setzen ihren Gradienten Null, d.h.

$$\nabla L(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 2\lambda x \\ -2x + 6y - 4\lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Wir betrachten nun drei Fälle:

1. Fall: $x = 0$.

Aus Gleichung (7) folgt $-2y = 0$, also $y = 0$, was aber unmöglich ist, da x und y nicht gleichzeitig Null sein können, denn $(0,0)$ liegt nicht auf der Ellipsenlinie ∂M.

2. Fall: $y = 0$.

Aus Gleichung (7) folgt $-2x = 0$, also $x = 0$, was aber unmöglich ist, da x und y nicht gleichzeitig Null sein können, denn $(0,0)$ liegt nicht auf der Ellipsenlinie ∂M.

3. Fall: $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

Aus Gleichung (7) folgt

$$\frac{2x - 2y}{2x} = \frac{x - y}{x} = \lambda = \frac{-2x + 6y}{4y} = \frac{-x + 3y}{2y},$$

also hat man, nach Multiplikation der Brüche mit $2xy$, die Gleichung

$$2xy - 2y^2 = -x^2 + 3xy,$$

also ist $x^2 - xy - 2y^2 = 0$. Die Nebenbedingung lautet $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, also $2y^2 = 1 - x^2$, somit haben wir $2x^2 + xy = 1$, also

$$y = \frac{1 - 2x^2}{x}. \tag{8}$$

Dies in die Nebenbedingung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{1 - 2x^2}{x}\right)^2 - 1 = 0 &\implies x^2 + \frac{2 - 8x^2 + 8x^4}{x^2} - 1 = 0 \\ &\implies \frac{x^4 + 2 - 8x^2 + 8x^4 - x^2}{x^2} = 0 \implies 9x^4 - 9x^2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Die Substitution $z := x^2$ ergibt die quadratische Gleichung $9z^2 - 9z + 2 = 0$, also muss $z^2 - z + \frac{2}{9} = 0$ sein. Die p-q-Formel liefert uns die Lösungen $z_1 = \frac{1}{3}$ und $z_2 = \frac{2}{3}$, somit ist x aus $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}$ und mit der Formel (8) ergeben sich die folgenden Extrempunkte von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$:

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \; p_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; p_4 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f(p_1) = f(p_2) = -9\frac{1}{3}$ und $f(p_3) = f(p_4) = -8\frac{1}{6}$ wird das Maximum von f auf ∂M und somit auch auf M in p_3 und p_4 angenommen und ist $-8\frac{1}{6}$.

Hausübungen

(A 34) Exakte DGLen (3+5=8 Punkte)

Begründen Sie jeweils, warum es sich bei den folgenden DGLen um exakte DGLen handelt und lösen Sie die zugehörigen AWPe.

(a) $12xy + 3 + 6x^2 \cdot y' = 0$; $y(1) = 1$.

(b) $2xe^y - 1 + (x^2e^y + 1) \cdot y' = 0$; $y(1) = 0$.

Hinweis: Gehen Sie bei (b) wie bei (a) vor. Wenn Sie die Lösung y nicht explizit bestimmen können, begründen Sie die Existenz von y durch einen geeigneten „großen Satz“.

LÖSUNG:

(a) In der Notation von Gleichung (1) haben wir $A(x,y) = 12xy + 3$ und $B(x,y) = 6x^2$, beide sind auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2$ definiert und es gilt: $\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 12x = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$. Somit ist die DGL exakt. Um das zugehörige AWP zu lösen, müssen wir eine Stammfunktion U bestimmen. Dazu integrieren wir zunächst A unbestimmt nach x:

$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx = \int (12xy + 3)\,dx = 6x^2y + 3x + c(y).$$

Um c und somit auch U zu bestimmen, leiten wir U nach y ab und setzen mit B gleich:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 6x^2 + c'(y) \stackrel{!}{=} 6x^2 \implies c'(y) = 0.$$

Jetzt integrieren wir c' unbestimmt nach y und erhalten damit eine Möglichkeit für c, z.B. $c(y) = 0$, also auch eine Möglichkeit für U, nämlich z.B.

$$U(x,y) = 6x^2y + 3x.$$

Nun setzen wir $U(x,y) = U(x_0,y_0)$, also haben wir

$$6x^2y + 3x = 6 + 3 \implies y = \frac{3-x}{2x^2}.$$

(b) In der Notation von Gleichung (1) haben wir $A(x,y) = 2xe^y - 1$ und $B(x,y) = x^2e^y + 1$, beide sind auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2$ definiert und es gilt: $\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 2xe^y = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$. Somit ist die DGL exakt. Um das zugehörige AWP zu lösen, müssen wir eine Stammfunktion U bestimmen. Dazu integrieren wir zunächst A unbestimmt nach x:

$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx = \int (2xe^y - 1)\,dx = x^2e^y - x + c(y).$$

Um c und somit auch U zu bestimmen, leiten wir U nach y ab und setzen mit B gleich:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2e^y + c'(y) \stackrel{!}{=} x^2e^y + 1 \implies c'(y) = 1.$$

Jetzt integrieren wir c' unbestimmt nach y und erhalten damit eine Möglichkeit für c, z.B. $c(y) = y$, also auch eine Möglichkeit für U, nämlich z.B.

$$U(x,y) = x^2e^y - x + y.$$

Nun setzen wir $U(x,y) = U(x_0,y_0)$, also haben wir

$$x^2e^y - x + y = 1 - 1 + 0 \implies x^2e^y - x + y = 0.$$

Die Gleichung kann man nicht ohne weiteres explizit lösen, aber wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2e^y - x + y\right) = x^2e^y + 1 > 0$$

ist, nach dem Satz über die implizite Funktion, die Gleichung $x^2e^y - x + y = 0$ lokal in einer Umgebung $(1,0)$ nach y auflösbar, also existiert eine Lösung des AWPs.

(A 35) Trennbare DGLen (2+3+2+5=12 Punkte)

Lösen Sie die AWPe der folgenden trennbaren DGLen.

(a) $y' = \sin(x)e^y$; $y(0) = 0$.

(b) $y' = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $y(4) = 1$.

(c) $y' = x\sqrt{1-y^2}$; $y(0) = 0$.

(d) $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2$; $y(1) = 1$.

LÖSUNG:

(a) In der Notation von (3) ist $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = e^y$ und $g(y_0) = 1 \neq 0$. Also:

$$\int_0^y \frac{1}{e^\eta}\,d\eta = \int_0^x \sin(\xi)\,d\xi \implies -e^{-y} + e^{-0} = -\cos(x) + \cos(0)$$
$$\implies e^{-y} = \cos(x) \implies y = -\log\left(\cos(x)\right).$$

(b) In der Notation von (3) ist $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ und $g(y_0) = 1 \neq 0$. Also:

$$\int_1^y \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}\,d\eta = \int_4^x \sqrt{\xi}\,d\xi \implies \int_1^y \sqrt{\eta}\,d\eta = \int_4^x \sqrt{\xi}\,d\xi$$
$$\implies \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{3} \implies y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} - 7 \implies y = \left(x^{\frac{3}{2}} - 7\right)^{\frac{2}{3}}.$$

(c) In der Notation von (3) ist $f(x) = x$ und $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ und $g(y_0) = 1 \neq 0$. Also:

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = \int_0^x \xi\,d\xi \implies \arcsin(y) - \arcsin(0) = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \implies y = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

(d) Wir formen die DGL folgendermaßen um:

$$y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} = \frac{1+y^2}{y} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Also ist $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ und $g(y) = \frac{1+y^2}{y}$ und $g(y_0) = 2 \neq 0$. Wir beachten, dass gilt:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{-x^2+1+x^2}{x(1+x^2)} = \frac{-x^2}{x(1+x^2)} + \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} = \frac{-x}{1+x^2} + \frac{1}{x}.$$

Dann haben wir:

$$
\begin{aligned}
&\int_1^y \frac{1}{\frac{1+\eta^2}{\eta}}\, d\eta = \int_1^x \left(\frac{-\xi}{1+\xi^2} + \frac{1}{\xi} \right) d\xi \\
\Longrightarrow\ &\int_1^y \frac{\eta}{1+\eta^2}\, d\eta = \int_1^x \left(\frac{-\xi}{1+\xi^2} + \frac{1}{\xi} \right) d\xi \\
\Longrightarrow\ &\left[\frac{1}{2} \log(1+\eta^2) \right]_1^y = \left[\frac{-1}{2} \log(1+\xi^2) + \log(\xi) \right]_1^x \\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2} \log(1+y^2) - \frac{\log(2)}{2} = \frac{-1}{2} \log(1+x^2) + \log(x) + \frac{\log(2)}{2} - \log(1) \\
\Longrightarrow\ &\log(1+y^2) = -\log(1+x^2) + 2\log(x) + 2\log(2) \\
\Longrightarrow\ &1+y^2 = \exp\left(-\log(1+x^2) + 2\log(x) + 2\log(2)\right) \\
\Longrightarrow\ &y = \sqrt{\exp\left(-\log(1+x^2) + 2\log(x) + 2\log(2)\right) - 1} \\
\Longrightarrow\ &y = \sqrt{\exp\left(\log\left((1+x^2)^{-1}\right)\right) \cdot \exp\left(\log(x^2)\right) \cdot \exp\left(\log(2^2)\right) - 1} \\
\Longrightarrow\ &y = \sqrt{\frac{4x^2}{1+x^2} - 1}.
\end{aligned}
$$

(A 36) Lineare DGLen und Variation der Konstanten (3+3+4=10 Punkte)

(a) Lösen Sie das AWP zur folgenden linearen DGL 1. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
y' + y \cdot \cot(x) &= 5e^{\cos(x)} \\
y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

(b) Lösen Sie das AWP zur folgenden homogenen linearen DGL 2. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
y'' - 8y' + 7y &= 0 \\
y(0) &= 0 \\
y'(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

(c) Lösen Sie das AWP zur folgenden homogenen linearen DGL 2. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
y'' + 12y' + 100y &= 0 \\
y(0) &= 1 \\
y'(0) &= 6.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Hat man eine **homogene lineare DGL 2. Ordnung**, d.h. eine DGL der Form

$$
y'' + ay' + by = 0 \tag{9}
$$

für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so ist das zugehörige AWP

$$
\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= 0 \\
y(x_0) &= y_0 \\
y'(x_0) &= y_1
\end{aligned} \tag{10}
$$

für *beliebige* y_0, y_1 auf ganz $\mathbb{R}$ *global* eindeutig lösbar. Man geht dazu in drei Schritten vor:

1. Man bestimmt die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.
2. Je nachdem, was für Nullstellen λ_1, λ_2 man erhält, wählt man y_1 und y_2:
   (i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
   (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.
   (iii) $\lambda = \alpha - i\beta$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0 \implies y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
3. Die Lösung des AWPs (10) lautet

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

wobei c_1, c_2 noch zu bestimmende reelle Zahlen sind, die man über die Anfangswertbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$ erhält.

LÖSUNG:

(a) Es ist $a(x) = \cot(x)$, also ist $A(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot(t)\,dt = [\log(\sin(t))]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \log(\sin(x))$ und es ist $f(x) = 5e^{\cos(x)}$. Es gilt:

$$y(x) = e^{-\log(\sin(x))} \cdot \left(0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{\log(\sin(\xi))} 5e^{\cos(\xi)}\,d\xi\right) = \frac{5}{\sin(x)} \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{\cos(\xi)}\sin(\xi)\,d\xi\right)$$
$$= \frac{5}{\sin(x)} \cdot \left[-e^{\cos(\xi)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{5\left(-e^{\cos(x)} + e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)}{\sin(x)} = \frac{-5\left(e^{\cos(x)} - 1\right)}{\sin(x)}.$$

(b) Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 4 - \sqrt{16-7} = 1$ und $\lambda_2 = 4 - \sqrt{16-7} = 7$, somit wählen wir $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{7x}$. Das AWP wird also durch $y(x) = c_1e^x + c_2e^{7x}$ gelöst, wobei $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ noch gelten müssen. Wegen $y'(x) = c_1e^x + 7c_2e^{7x}$ haben wir also das lineare Gleichungssystem

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 0$$
$$y'(0) = c_1 \cdot 1 + 7c_2 \cdot 1 = 1,$$

also ist $c_2 = \frac{1}{6}$ und $c_1 = \frac{-1}{6}$ und $y(x) = -\frac{e^x}{6} + \frac{e^{7x}}{6}$.

(c) Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + 12\lambda + 100 = 0$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -6 - \sqrt{36-100} = -6 - 8i$ und $\lambda_2 = -6 + \sqrt{36-100} = -6 + 8i$, somit wählen wir $y_1(x) = e^{-6x}\cos(8x)$ und $y_2(x) = e^{-6x}\sin(8x)$. Das AWP wird also durch $y(x) = c_1e^{-6x}\cos(8x) + c_2e^{-6x}\sin(8x)$ gelöst, wobei $y(0) = 1$ und $y'(0) = 6$ noch gelten müssen. Wegen $y'(x) = c_1\left(-6e^{-6x}\cos(8x) - 8e^{-6x}\sin(8x)\right) + c_2\left(-6e^{-6x}\sin(8x) + 8e^{-6x}\cos(8x)\right)$ haben wir also das lineare Gleichungssystem

$$y(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot 0 = c_1 = 1$$
$$y'(0) = c_1 \cdot (-6 \cdot 1 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 0) + c_2 \cdot (-6 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot 1) = -6c_1 + 8c_2 = 6,$$

also ist $c_1 = 1$ und $c_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ und $y(x) = e^{-6x}\cos(8x) + \frac{3}{2}e^{-6x}\sin(8x)$.