Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

Mathe II

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Die Hessematrix

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

LÖSUNG:

Es gilt $\nabla f(x,y) = (nx^{n-1}, ny^{n-1})$. Für $n \geq 2$ liegt also bei $(0,0)$ eine kritische Stelle vor.

Ist n **gerade**, so gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ daß $f(x,y) > 0$. Da für $n \geq 2$ gilt $f(0,0) = 0$, liegt ein isoliertes Minimum vor.

Ist n **ungerade**, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ daß $f(\varepsilon, \varepsilon) > 0$ und $f(-\varepsilon, -\varepsilon) < 0$. Bei $(0,0)$ liegt also keine lokale Extremstelle vor.

Die Hessematrix in $(0,0)$ ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}(f))(x,y)\big|_{(x,y)=(0,0)} &= \left.\begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } n \geq 3 \\[2ex] \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{falls } n = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Hessematrix ist also nur im Fall $n = 2$ positiv definit. In diesem Fall liegt auch ein lokales Minimum vor. In allen anderen Fällen ist sie positiv (und negativ) semidefinit. Es gibt also Fälle, in denen die Hessematrix positiv semidefinit ist, aber kein lokales Minimum vorliegt. Dies widerspricht natürlich nicht den Aussagen der Vorlesung, da die Bedingung war, daß die Hessematrix in dem entsprechenden Punkt positiv definit ist. Ausserdem gibt es Fälle, in denen ein Minimum vorlieg (nämlich n gerade und größer als 2), in denen die Hessematrix nicht positiv definit ist. Das liegt daran, dass die positive Definitheit zwar ein *hinreichendes* Kriterium ist, aber nicht notwendig. Schliesslich zeigt die Aufgabe, daß die Indefinitheit von $(\mathrm{Hess} f)$ in einem Punkt keine notwendige Bedingung dafür ist, daß keine lokale Extremstelle vorliegt.

(G 2) Der Affensattel

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung Df von f.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.

(c) Ist H_f positiv definit, indefinit oder negativ definit?

(d) Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

LÖSUNG:

(a) $\mathcal{J}_f = (3x^2 - 3y^2, -6xy) = 3(x^2 - y^2, -6xy)$

(b) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$, $H_f(0,0) = \mathbf{0}$

(c) Die Hessematrix ist indefinit.

(d) Nein, dies ist ein Sattelpunkt.

(G 3) Extrema

(a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie das Extremum von h. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x-2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, daß f keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ positiv definit?

LÖSUNG:

(a) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von h bis einschließlich 2. Ordnung:

$$h_x(x,y) = -2x, \quad h_y(x,y) = -2y$$
$$h_{xx}(x,y) = -2 = h_{yy}(x,y), \quad h_{xy}(x,y) = 0 = h_{yx}(x,y).$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema ist $\nabla h(x,y) = 0$. Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\nabla h(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

Nun überprüfen wir die hinreichende Bedingung:

$$h_{xx}(0,0) \cdot h_{yy}(0,0) - h_{xy}^2(0,0) = 4 > 0.$$

Also besitzt h in $(0,0)$ ein relatives Extremum.
Da $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$ ist es ein Maximum.

(b) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung:

$$f_x(x,y) = (-x+3)e^{-x+y}, \quad f_y(x,y) = (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xx}(x,y) = (x-4)e^{-x+y}$$
$$f_{yy}(x,y) = (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xy}(x,y) = (-x+3)e^{-x+y} = f_{yx}(x,y).$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema ist $\nabla f(x,y) = 0$. Es gilt:

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (-x+3)e^{-x+y} = 0 \\ (x-2)e^{-x+y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \wedge x = 2 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Also besitzt f keine Extrema.
Die Hesse'sche Matrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-4)e^{-x+y} & (-x+3)e^{-x+y} \\ (-x+3)e^{-x+y} & (x-2)e^{-x+y} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 6.11 (Seite 189) wissen wir, daß eine Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle führenden Hauptunterdeterminanten positiv sind. Damit $H_f(x,y)$ positiv definit ist, muß somit gelten:

$$\begin{aligned} (x-4)e^{-x+y} > 0 \quad &\wedge \quad (x-4)\,(x-2)e^{-2x+2y} - (-x+3)^2 e^{-2x+2y} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x-4 > 0 \quad &\wedge \quad (x-4)\,(x-2) - (-x+3)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x > 4 \quad &\wedge \quad x^2 - 6x + 8 - (x^2 - 6x + 9) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x > 4 \quad &\wedge \quad -1 > 0 \end{aligned}$$

Also ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ nirgends positiv definit.

(G 4) Lagrangesche Multiplikatoren

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

LÖSUNG:

Ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt 0 läßt sich eindeutig durch die Angabe einer Ecke (x,y,z) beschreiben. Offensichtlich hat ein achsenparalleler Quader mit maximalem Volumen im Ellipsoid seien Mittelpunkt in 0 und seine Ecken auf dem Rand des Ellipsoids, d.h. für die Ecken (x,y,z) gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Wir betrachten die Ecke des Quaders mit $x,y,z \geq 0$. Das Volumen ist $V(x,y,z) = 8xyz$. Die Nebenbedingung ist $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \nabla V(x,y,z) &= (8yz, 8xz, 8xy)^T \\ \nabla f(x,y,z) &= (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}). \end{aligned}$$

Aus der Langrange'schen Multiplikatorenregel folgt

(i) $8y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}$

(ii) $8x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{a^2}$

(iii) $8x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{a^2}$

Diese drei Gleichung ergeben

$$8x_0y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

also

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Aus $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ (die NB!) folgt somit $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, also ist die Lösung

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c$$

Da die Funktion $V(x,y,z)$ stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $A := \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Ist $x = 0, y = 0$ oder $z = 0$, so ist $V(x,y,z) = 0$. Ist $V(x,y,z)$ das Maximum von V auf A, so gilt $x,y,z > 0$. Die Lagrangesche Multiplikatorenregel greift also und der Punkt (x_0,y_0,z_0) ist das Maximum.

(G 5) Taylorreihen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2.$$

Entwickeln Sie f in Potenzen von $(x-1)$ und $(y+2)$.

LÖSUNG:

Wir bestimmen die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,-2)$.
f ist beliebig oft differenzierbar, wobei die partiellen Ableitungen ab der 4. Ordnung identisch verschwinden.
Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy, \quad f_y(x,y) = x^2 + 3 \\ f_{xx}(x,y) &= 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x, \quad f_{yy}(x,y) = 0 \\ f_{xxx}(x,y) &= 0, \quad f_{xxy}(x,y) = 2, \quad f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Satz über die Taylor'sche Formel (Satz 2.3, Seite 224) an mit $(x_0,y_0) = (1,-2)$ und $(\Delta x, \Delta y) = (x-1, y+2)$.
Zunächst bestimmen wir die Werte der Funktion und der partiellen Ableitungen an der Stelle $(1,-2)$:

$$\begin{aligned} f(1,-2) &= -10, \quad f_x(1,-2) = -4, \quad f_y(1,-2) = 4 \\ f_{xx}(1,-2) &= -4, \quad f_{xy}(1,-2) = 2, \quad f_{xxy}(1,-2) = 2. \end{aligned}$$

Alle anderen partiellen Ableitungen sind null.
Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt:

$$\begin{aligned} f(x,y) = &-10 - 4(x-1) + 4(y+2) - \frac{4}{2}(x-1)^2 + 2(x-1)\ (y+2) + 0 \cdot (y+2)^2 \\ &+ 0 \cdot (x-1)^3 + (x-1)^2\ (y+2) + 0 \cdot (x-1)\ (y+2)^2 + 0 \cdot (y+2)^3 \\ &= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)\ (y+2) + (x-1)^2\ (y+2). \end{aligned}$$

Hausübungen

(A 32) Implizize Funktionen (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

a) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

d) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

LÖSUNG:

a) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $g(x,y) = 0$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ lokal nach y auflösbar.

Weiterhin gilt $g_y(x,y) = 2\sin(y)\cos(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Also existiert für (x_0, y_0), $y_0 \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ eine Umgebung U von x_0 und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $g(x, f(x)) = 0, x \in U$.

(b) **Für** $\underline{(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)}$**:**
$g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) = 2\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) = 1$. Also ist $g(x,y) = 0$ in (x_0, y_0) lokal nach y auflösbar.

(c) Es gilt

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))},$$

also

$$f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{2\cos(y_0)\sin(y_0)}.$$

(d) $f'(x_0) = -3(\sqrt[3]{0.5})^2$.

(A 33) Extremwerte unter Nebenbedingungen (10 Punkte)

Gegeben sei eine zylindrische Dose. Bezeichne r den Radius der Dose und h die Höhe. Die Oberfläche O beträgt $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r,h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche der Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.

LÖSUNG:

Lagrange-Funktion:

$$L(r,h,\lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 1000), \quad r,h > 0.$$

Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
L_r(r,h,\lambda) &= 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h \overset{!}{=} 0,\\
L_h(r,h,\lambda) &= 2\pi r + \lambda \pi r^2 \overset{!}{=} 0,\\
L_\lambda(r,h,\lambda) &= \pi r^2 h - 1000 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Umformen der zweiten Gleichung ergibt $\pi r(2+\lambda r) = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $r = 0$ und $r = -2/\lambda$. Die Lösung $r = 0$ ist nicht zulässig. Also erhält man mit $\lambda = -2/r$ das neue Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
4\pi r - 2\pi h &= 0,\\
\pi r^2 h - 1000 &= 0.
\end{aligned}
$$

Somit $r_* = 10/\sqrt[3]{2\pi}$, $h_* = 20/\sqrt[3]{2\pi}$ und $O_* = 6\pi r_*^2 \approx 553.58$.

Da weiterhin $O(1, 1000/\pi) = 2\pi + 2000 > O_*$ gilt, ist O_* das globale Minimum.