Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 3. Juli 2007

Mathe II

10. Übung mit Lösungshinweisen

Auf diesem Übungsblatt behandeln wir die Differenzialrechnung in höherdimensionalen Räumen. Es gelten die folgenden allgemeinen Voraussetzungen:

E, F sind endlich-dimensionale, normierte Vektorräume, d.h. beide sind mit einer Funktion $\|\cdot\|$ ausgestattet, die den Vektoren eine Länge zuordnet. Normalerweise denken wir uns $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$ für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$, jeweils mit der Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_i x_i^2}$ oder der Norm $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$. **Wichtig ist in diesem Fall, dass bezüglich dieser Normen Folgen im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ genau dann konvergieren, wenn alle einzelnen Komponenten konvergieren.** Außerdem ist $U \subset E$ immer eine offene Teilmenge, z.B. die Menge $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ (offene Einheitskugel) in $E = \mathbb{R}^2$. In vielen Fällen ist aber einfach $U = E$.

Wir definieren dann die folgenden Begriffe: Eine Abbildung $f : U \to F$ heißt **in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar**, falls eine lineare Abbildung $A : E \to F$ existiert, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt. Weil die lineare Abbildung A von x und f abhängt und sogar eindeutig bestimmt ist, schreiben wir $Df_x := A$ und nennen sie das **Differenzial von f in x**.

Eine Abbildung $f : U \to F$ heißt **differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist.

Ist eine Abbildung $f : U \to F$ gegeben, ein Punkt $x \in U$ und ein Vektor $v \in E$, so heißt

$$\partial_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

die **Richtungsableitung von f in x in Richtung v**.

Speziell für $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}$, $x \in U$ und $e_1, e_2, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^m$, wobei bei e_j nur der j-te Eintrag 1 ist und alle anderen 0, schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \partial_{e_j} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_m) - f(x)}{t}$$

und nennt diese Zahl die **partielle Ableitung nach x_j**. Wenn man also eine mehrdimensionale Funktion partiell nach einer Variablen ableitet, tut man so, als ob die Funktion nur von dieser einen Variablen abhängt und leitet sie danach ab. Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + \cos(x_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - \sin(x_2).$$

Wenn die partiellen Ableitungen in alle Koordinatenrichtungen existieren, heißt die Funktion **partiell differenzierbar**. Wenn die partiellen Ableitungen alle stetig sind, heißt die Funktion **stetig partiell differenzierbar**.

Ist eine Abbildung $f : U \to F$ in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar und ist ein Vektor $v \in E$ gegeben, so existiert auch die Richtungsableitung von f in x in Richtung v und sie ist:

$$\partial_v f(x) = Df_x(v).$$

Hat man $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, die in $x \in U$ differenzierbar ist, so definiert man eine Matrix

$$\mathcal{J}_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix},$$

die **Jacobi-Matrix von f in** x. Das Differenzial ist dann folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} Df_x : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h &\longmapsto \mathcal{J}_f(x) \cdot h. \end{aligned}$$

Die bekannte Ableitung im Eindimensionalen ist eine 1×1-Jacobi-Matrix, das Differenzial im Eindimensionalen ist die Multiplikation mit dieser Zahl.

Gruppenübungen

(G 1) Formen der Differenzierbarkeit

Fügen Sie zwischen die folgenden Aussagen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **alle** allgemein richtigen Implikationspfeile „ $\Longrightarrow$ “ ein:

f ist stetig. $\qquad$ f ist differenzierbar.

f ist partiell differenzierbar. $\qquad$ f ist stetig partiell differenzierbar.

LÖSUNG:

$$\begin{tikzcd}
f \text{ ist stetig.} & f \text{ ist differenzierbar.} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \\
f \text{ ist partiell differenzierbar.} & f \text{ ist stetig partiell differenzierbar.} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(G 2) Richtungsableitung, Partielle Ableitung, Differenzial, Jacobi-Matrix

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 + e^{x_3}$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der entsprechenden Definition die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ von f in $x = (2, 1, 0)$ in Richtung $v = (2, -1, 1)$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ von f.

(c) Ist f differenzierbar, d.h ist f in jedem Punkt von $\mathbb{R}^3$ differenzierbar? Wenn ja, wie sieht das Differenzial $Df_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an einer allgemeinen Stelle $x = (x_1, x_2, x_3)$ aus? Und was hat Df_x mit der Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f(x)$ zu tun? Können Sie mit Hilfe von $\mathcal{J}_f(x)$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ aus (a) auf eine zweite Art und Weise berechnen?

LÖSUNG:

(a) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_{(2,-1,1)} f(2,1,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((2,1,0)+t(2,-1,1))-f(2,1,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(2+2t,1-t,t)-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(4+8t+4t^2)(1-t)-(4+4t)(1-2t+t^2)+e^t-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^t-8t^3+8t-1}{t} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t-24t^2+8}{1} = 9.
\end{aligned}$$

(b) Wir leiten jeweils nach x_1, x_2, x_3 ab:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 - 4x_1x_2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) &= e^{x_3}.
\end{aligned}$$

(c) Jede partielle Ableitung existiert überall und ist überall stetig als Summe von Polynomen bzw. als Exponentialfunktion. Daher ist f stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar. Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f(x)$ ist der liegende Vektor

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3),\quad \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3),\quad \tfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\right) = \left(2x_1x_2-2x_2^2,\quad x_1^2-4x_1x_2,\quad e^{x_3}\right)$$

und das Differenzial Df_x ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
Df_x : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{J}_f(x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = (2x_1x_2-2x_2^2)h_1 - (x_1^2-4x_1x_2)h_2 + e^{x_3}h_3.
\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\partial_{(2,-1,1)} f(2,1,0)$ lässt sich nun auch wie folgt berechnen:

$$\partial_{(2,-1,1)} f(2,1,0) = \mathcal{J}_f(2,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (4-2)\cdot 2 + (4-8)\cdot(-1) + (e^0)\cdot 1 = 4+4+1 = 9.$$

(G 3) Höhere Ableitungen und Taylor im Mehrdimensionalen

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 + e^{x_3}$ wie in **(G 2)**. Bestimmen Sie die höheren partiellen Ableitungen von f bis zum Grad 3 und stellen Sie die Taylorpolynome vom Grad 0 bis 3 mit Entwicklungspunkt $a = (2,1,0)$ auf. Ist bei der Berechnung der höheren partiellen Ableitungen von f die Reihenfolge der Differenziation wichtig?

Hinweis: Das Taylorpolynom vom Grad n mit Entwicklungspunkt $a = (a_1,a_2,a_3)$ von f ist

$$T_f^n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{0\le j_1,j_2,j_3\le k \\ j_1+j_2+j_3=k}} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\partial x_3^{j_3}}(a) \cdot \frac{(x_1-a_1)^{j_1}(x_2-a_2)^{j_2}(x_3-a_3)^{j_3}}{j_1!j_2!j_3!} \right).$$

LÖSUNG:

Bei der Berechnung der höheren partiellen Ableitungen von f ist die Reihenfolge der Differenziation nicht wichtig, da die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist und man iterativ des Satz von Schwarz benutzen kann. Die partiellen Ableitungen bis zum Grad 3 sind:

$$
\begin{aligned}
& f = x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 + e^{x_3}, \\
& \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2 - 2x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 - 4x_1x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = e^{x_3}, \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_1 - 4x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = e^{x_3}, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3} = 0, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3} = e^{x_3}.
\end{aligned}
$$

An der Stelle $a = (2, 1, 0)$ haben wir dann:

$$
\begin{aligned}
& f(a) = 1, \\
& \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) = 1, \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} f(a) = 0, \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) = 1, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}(a) = 0, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a) = -4, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a) = 0, \\
& \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}(a) = 1.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Taylorpolonome

$$
\begin{aligned}
T_f^0(x,a) &= f(a) = 1, \\
T_f^1(x,a) &= T_f^0(x,a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)(x_3 - a_3) \\
&= 1 + 2(x_1 - 2) - 4(x_2 - 1) + x_3, \\
T_f^2(x,a) &= T_f^1(x,a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\frac{(x_1 - a_1)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a)(x_1 - a_1)(x_3 - a_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\frac{(x_2 - a_2)^2}{2!} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a)\frac{(x_3 - a_3)^2}{2!}, \\
&= 1 + 2(x_1 - 2) - 4(x_2 - 1) + x_3 + (x_1 - 2)^2 - 4(x_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x_3^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_f^3(x,a) &= T_f^2(x,a) + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a)\frac{(x_1-a_1)^3}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(a)\frac{(x_1-a_1)^2(x_2-a_2)}{2!1!} \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_3}(a)\frac{(x_1-a_1)^2(x_3-a_3)}{2!1!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^2}(a)\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)^2}{1!2!} \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_3^2}(a)\frac{(x_1-a_1)(x_3-a_3)^2}{1!2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}(a)(x_1-a_1)(x_2-a_2)(x_3-a_3) \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a)\frac{(x_2-a_2)^3}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2\partial x_3}(a)\frac{(x_2-a_2)^2(x_3-a_3)}{2!1!} \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 x_3^2}(a)\frac{(x_2-a_2)(x_3-a_3)^2}{1!2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}(a)\frac{(x_3-a_3)^3}{3!} \\
&= 1 + 2(x_1-2) - 4(x_2-1) + x_3 + (x_1-2)^2 - 4(x_2-1)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\
&+ (x_1-2)^2(x_2-1) - 2(x_1-2)(x_2-1)^2 + \frac{1}{6}x_3^3.
\end{aligned}
$$

(G 4) Kettenregel im Mehrdimensionalen

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_1x_2, x_1 + x_2^3)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (z, z)$. Bestimmen Sie $\mathcal{J}_{(f\circ g)}(7)$ auf zwei Arten und Weisen.

Hinweis: Für die Benutzung der Kettenregel im Mehrdimensionalen ist es hilfreich, sich alle obigen Vektoren als stehende Vektoren vorzustellen. Dann steht in der j-ten Spalten der Jacobi-Matrix die vektorwertige Funktion nach x_j partiell abgeleitet.

LÖSUNG:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen von f und g:

$$\mathcal{J}_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 \\ 1 & 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_g(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(7) = \mathcal{J}_f(g(7)) \cdot \mathcal{J}_g(7) = \mathcal{J}_f(7,7) \cdot \mathcal{J}_g(7) = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 1 & 147 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 148 \end{pmatrix}.$$

Alternativ bestimmen wir direkt: $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (z^2 - z\cdot z, z + z^3) = (0, z + z^3)$. Deswegen ist

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 3z^2 \end{pmatrix}, \text{ also } \mathcal{J}_{(f\circ g)}(7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 148 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

(A 29) Mehrdimensionales Ableiten (2+4+4=10 Punkte)

Wir fassen den Raum aller 2×2-Matrizen als vierdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}^4$ auf. Die Menge der invertierbaren Matrizen[1] bezeichnen wir mit $U \subset \mathbb{R}^4$. Die Matrix-Inversion

$$U \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_a(a,b,c,d) \\ \eta_b(a,b,c,d) \\ \eta_c(a,b,c,d) \\ \eta_d(a,b,c,d) \end{pmatrix}$$

[1] Diese Teilmenge ist offen und deswegen ist die folgende Betrachtung sinnvoll.

nennen wir η.

(a) Bestimmen Sie η_a, η_b, η_c, η_d mit Hilfe der expliziten Inversions-Formel für 2×2-Matrizen.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von η_a, η_b, η_c, η_d.

(c) Rechnen Sie nach, dass gilt:

$$D\eta_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

LÖSUNG:

(a) Die explizite Inversions-Formel für 2×2-Matrizen lautet

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Deswegen haben wir $\eta_a(a,b,c,d) = \frac{d}{ad-bc}$, $\eta_b(a,b,c,d) = \frac{-b}{ad-bc}$, $\eta_c(a,b,c,d) = \frac{-c}{ad-bc}$, $\eta_d(a,b,c,d) = \frac{a}{ad-bc}$.

(b) Es sind genau 16 partielle Ableitungen zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_a\eta_a &= \frac{-d^2}{(ad-bc)^2}, \; \partial_b\eta_a = \frac{cd}{(ad-bc)^2}, \; \partial_c\eta_a = \frac{bd}{(ad-bc)^2}, \; \partial_d\eta_a = \frac{-bc}{(ad-bc)^2} \\
\partial_a\eta_b &= \frac{bd}{(ad-bc)^2}, \; \partial_b\eta_b = \frac{-ad}{(ad-bc)^2}, \; \partial_c\eta_b = \frac{-b^2}{(ad-bc)^2}, \; \partial_d\eta_b = \frac{ab}{(ad-bc)^2} \\
\partial_a\eta_c &= \frac{cd}{(ad-bc)^2}, \; \partial_b\eta_c = \frac{-c^2}{(ad-bc)^2}, \; \partial_c\eta_c = \frac{-ad}{(ad-bc)^2}, \; \partial_d\eta_c = \frac{ac}{(ad-bc)^2} \\
\partial_a\eta_d &= \frac{-bc}{(ad-bc)^2}, \; \partial_b\eta_d = \frac{ac}{(ad-bc)^2}, \; \partial_c\eta_d = \frac{ab}{(ad-bc)^2}, \; \partial_d\eta_d = \frac{-a^2}{(ad-bc)^2}.
\end{aligned}$$

Dies sind die Einträge der Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_\eta(a,b,c,d)$.

(c) Einerseits ist

$$\mathcal{J}_\eta(a,b,c,d) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{pmatrix} -d^2w + cdx + bdy - bcz \\ bdw - adx - b^2y + abz \\ cdw - c^2x - ady + acz \\ -bcw + acx + aby - a^2z \end{pmatrix}$$

und andererseits ist

$$\begin{aligned}
&- \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{pmatrix} -dw + by & -dx + bz \\ cw - ay & cx - az \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{pmatrix} -d^2w + bdy + cdx - bcz & bdw - b^2y - adx + abz \\ cdw - ady - c^2x + acz & -bcw + aby + acx - a^2z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(A 30) Höhere Ableitungen und Taylor im Mehrdimensionalen (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto e^{x_1^2+x_2^2} - 8x_1^2 - 4x_2^2$. Bestimmen Sie die höheren partiellen Ableitungen von f bis zum Grad 4 und stellen Sie die Taylorpolynome vom Grad 0 bis 4 mit Entwicklungspunkt $a = (0, 0)$ auf.

Hinweis: Das Taylorpolynom vom Grad n mit Entwicklungspunkt $a = (a_1, a_2)$ von f ist

$$T_f^n(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{0 \le j_1, j_2 \le k \\ j_1+j_2=k}} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}(a) \cdot \frac{(x_1 - a_1)^{j_1}(x_2 - a_2)^{j_2}}{j_1! j_2!} \right).$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen bis zum Grad 4 sind:

$$\begin{aligned}
&f = e^{x_1^2+x_2^2} - 8x_1^2 - 4x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2} - 16x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2} - 8x_2,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (2 + 4x_1^2)e^{x_1^2+x_2^2} - 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 4x_1x_2 e^{x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = (2 + 4x_2^2)e^{x_1^2+x_2^2} - 8,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = (12x_1 + 8x_1^3)e^{x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = (4x_2 + 8x_1^2 x_2)e^{x_1^2+x_2^2},\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = (8x_1x_2^2 + 4x_1)e^{x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} = (12x_2 + 8x_2^3)e^{x_1^2+x_2^2},\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} = (12 + 48x_1^2 + 16x_1^4)e^{x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^3 \partial x_2} = (24x_1x_2 + 16x_1^3 x_2)e^{x_1^2+x_2^2},\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = (8x_1^2 + 16x_1^2x_2^2 + 8x_2^2 + 4)e^{x_1^2+x_2^2}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3} = (24x_1x_2 + 16x_1x_2^3)e^{x_1^2+x_2^2},\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} = (12 + 48x_2^2 + 16x_2^4)e^{x_1^2+x_2^2}.
\end{aligned}$$

An der Stelle $a = (0, 0)$ haben wir dann:

$$\begin{aligned}
&f(a) = 1,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1} f(a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(a) = 0,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) = -14, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) = -6,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a) = 0,\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}(a) = 12, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a) = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a) = 4, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a) = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}(a) = 12.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Taylorpolonome

$$
\begin{aligned}
T_f^0(x,a) &= f(a) = 1,\\
T_f^1(x,a) &= T_f^0(x,a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2-a_2) = 1,\\
T_f^2(x,a) &= T_f^1(x,a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\frac{(x_1-a_1)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)(x_1-a_1)(x_2-a_2)\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\frac{(x_2-a_2)^2}{2!} = 1 - 7x_1^2 - 3x_2^2,\\
T_f^3(x,a) &= T_f^2(x,a) + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a)\frac{(x_1-a_1)^3}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a)\frac{(x_1-a_1)^2(x_2-a_2)}{2!1!}\\
&\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a)\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)^2}{1!2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a)\frac{(x_2-a_2)^3}{3!} = 1 - 7x_1^2 - 3x_2^2,\\
T_f^4(x,a) &= T_f^3(x,a) + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}(a)\frac{(x_1-a_1)^4}{4!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a)\frac{(x_1-a_1)^3(x_2-a_2)}{3!1!}\\
&\quad + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a)\frac{(x_1-a_1)^2(x_2-a_2)^2}{2!2!} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a)\frac{(x_1-a_1)^1(x_2-a_2)^3}{1!3!}\\
&\quad + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}(a)\frac{(x_2-a_2)^4}{4!} = 1 - 7x_1^2 - 3x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^4 + x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^4.
\end{aligned}
$$

(A 31) Kettenregel im Mehrdimensionalen (5+5=10 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $z \mapsto (1, z, z^2)$. Bestimmen Sie jeweils auf zwei Arten und Weisen:

(a) $(f \circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1)$ (b) $\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1,2,0)$

LÖSUNG:

Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen von f und g:

$$\mathcal{J}_f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2+x_3, & x_1+x_3, & x_2+x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_g(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2z \end{pmatrix}.$$

(a) Nach der Kettenregel gilt:

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1) &= \mathcal{J}_f(g(1)) \cdot \mathcal{J}_g(1) = \mathcal{J}_f(1,1,1)\cdot \mathcal{J}_g(1)\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6.
\end{aligned}
$$

Alternativ bestimmen wir direkt: $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z + z^3 + z^2$. Deswegen ist

$$(f\circ g)'(z) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = 1 + 3z^2 + 2z, \text{ also } (f\circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1) = 1+3+2 = 6.$$

(b) Nach der Kettenregel gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1,2,0) &= \mathcal{J}_g(f(1,2,0)) \cdot \mathcal{J}_f(1,2,0) = \mathcal{J}_g(2)\cdot \mathcal{J}_f(1,2,0)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alternativ bestimmen wir direkt:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deswegen ist $\mathcal{J}_{(g\circ f)}(x_1, x_2, x_3) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_2 + x_1 \\ 2x_1x_2^2+4x_1x_2x_3+2x_2^2x_3+2x_2x_3^2+2x_1x_3^2 & 2x_1^2x_2+2x_1^2x_3+4x_1x_2x_3+2x_2x_3^2+2x_1x_3^2 & 2x_1^2x_2+2x_1x_2^2+2x_2^2x_3+4x_1x_2x_3+2x_1^2x_3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1, 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8+0 & 4+0 & 4+8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$