Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 27. Juni 2007

Mathe II

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Fourierreihen

Skizzieren Sie die folgendenden 2π-periodischen Funktionen und berechnen Sie deren Fourierreihen:

(a) $f(x) = |x|, \qquad x \in (-\pi, \pi]$ (b) $g(x) = |\sin(x)|, x \in (-\pi, \pi]$

(c) $h(x) = (x-\pi)^2, \qquad 0 \le x < 2\pi$

Hinweis: Sie können die Identitäten $\sin x \cos jx = \frac{1}{2}[\sin(j+1)x) - \sin(j-1)x]$ bzw. $\int x \cos(nx)dx = \left(\frac{\cos(nx)}{n^2} + x\frac{\sin(nx)}{n}\right)$ und $\int x^2 \cos(nx)dx = \frac{2x}{n^2}\cos(nx) + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin(nx)$ benutzen.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist gerade, deshalb sind die Koeffizienten b_n der Fourierreihe gleich 0. Außerdem gilt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

die Fourierreihe lautet somit

$$FR(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

(b) Die Funktion g ist auf $(-\pi, \pi)$ gerade,$g(x) = g(-x)$, also gilt $b_j = 0$ für $j \in N$.

$a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^\pi |\sin(x)|\,dx = (2/\pi)\int_0^\pi \sin(x)\,dx = 4/\pi$.

Für $j > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
a_j &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(jx)\, dx \\
&= (2/\pi) \int_0^{\pi} sin(x) \cos(jx)\, dx \\
&= 2/(\pi) \int_0^{\pi} [\sin((j+1)x) - \sin((j-1)x)]/2\, dx \\
&= 1/\pi \left[-1/(j+1)\cos((j+1)x) + 1/(j-1)\cos((j-1)x)|_0^{\pi}\right] \\
&= 1/\pi \left[-1/(j+1)(-1)^{(j+1)} + 1/(j-1)(-1)^{(j-1)} + 1/(j+1) - 1/(j-1)\right] \\
&= 1/\pi \left[-2/((j-1)(j+1))(1+(-1)^j)\right]
\end{aligned}$$

$$a_1 = (2/\pi) \int_0^{\pi} \sin(2x)/2\, dx = (1/\pi)(-\cos(2x)/2)|_0^{\pi} = 0$$

Die Fourierreihe von g lautet somit

$$FR(x) = 2/\pi - 4 \sum_{j=1}^{\infty} 1/(\pi(2j-1)(2j+1))\ \cos(2jx)$$

(c) Wegen $h(-x) = (-x-\pi)^2 = (x+\pi)^2 = (x-\pi)^2$ (Periode 2π!) ist h eine gerade Funktion. Die Koeffizienten b_n der Fourierreihe sind daher gleich 0.

$$a_0 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x-\pi)^2 dx = \tfrac{2}{\pi} \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\pi + \pi^2 x\right]_0^{\pi} = \tfrac{2}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x-\pi)^2 \cos(nx) dx \\
&= \tfrac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx - 2\pi \int_0^{\pi} x\cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \\
&= \tfrac{2}{\pi} \left[\tfrac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi) - \tfrac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi) + \tfrac{2\pi}{n^2}\right] \\
&= \tfrac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $FR(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

(G 2) Ableitungen stetiger linearer Funktionen

Es sei $A : V \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Abbildung zwischen den normierten Vektorräumen V und $\mathbb{R}$.

(a) Berechne die Richtungsableitung $\lim_{t\to 0} \frac{A(x+th)-A(x)}{t}$ am Punkt $x \in V$ in Richtung $h \in V$.

(b) Ist die Abbildung A differenzierbar? Wenn ja, wie lautet die Ableitung DA_x an einem Punkt $x \in V$?

LÖSUNG:

1. $\lim_{t\to 0} \frac{A(x+th)-A(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{A(x+th)-A(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{A(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot A(h)}{t} = \lim_{t\to 0} A(h) = A(h)$.
2. Ja, $dA(x)(h) = A(h)$.

(G 3) Partielle Ableitungen

Die Richtungsableitungen $\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}$ einer Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in Richtung der i-ten Einheitsvektoren $\mathbf{e_i}$ werden (sofern sie existieren) *partielle Ableitungen* genannt. Man schreibt dafür auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

(a) Man berechne für die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen sowie deren partielle Ableitungen.

(i) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10.$ (ii) $f(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$

(b) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben. Zeigen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

LÖSUNG:

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y + 12xy^2 + 4y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8xy + 12y^2$.

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z\sin(x+y+z) + yz\cos(x+y+z) + xz\cos(x+y+z) - xyz\sin(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y\sin(x+y+z) + yz\cos(x+y+z) + xy\cos(x+y+z) - xyz\sin(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} x\sin(x+y+z) + xz\cos(x+y+z) + xy\cos(x+y+z) - xyz\sin(x+y+z)$,

2. Die ersten Richtungsableitungen berechnen sich zu $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$ Die zweiten Ableitungen lauten daher $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Es folgt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

(G 4) Ein Gegenbeispiel

Die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f ist im Punkt $\mathbf{0}$ partiell differenzierbar.

(b) Die Richtungsableitung $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv)-f(\mathbf{0})}{t}$ exisitert nur für $v \in \{0\} \times \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

(c) Die Funktion f ist nicht differenzierbar.

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(b) Es sei $v = (v_1, v_2)$ kein vielfaches der Standard-Basisvektoren, d.h. $v_1 \cdot v_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{f((0,0)+hv) - f(0,0)}{h} = \frac{1}{h} \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

und somit existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+hv)-f(0,0)}{h}$ nicht.

(c) Da nicht alle Richtungsableitungen im Punkt $\mathbf{0}$ existieren, kann f nicht differenzierbar sein.

(G 5) Ableitungen stetiger linearer Funktionen II

Es seien V und W normierten Vektorräume und $f : V \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Abbildung. Wir wissen aus Aufgabe G1, daß für alle $v \in V$ das Differential $df(v)$ genau durch die Funktion f gegeben ist.
Kommentiere folgenden Einwand:

"Ist $V = W = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ die Identität, so gilt $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, im Widerspruch zu oben gezeigtem!"

(Wo liegt der Fehler?)

Lösung:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ die Identität, so gilt $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet $\lim_{t\to 0} \frac{f(v+th)-f(t)-f'(v)\cdot th}{t} = 0$, d.h. das Differential $df(v)$ ist durch $df(v)(h) = h = f(h)$ gegeben! Es gibt also keinen Widerspruch!

Hausübungen

(A 26) Kurven im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)

Es seien α und β zwei stetig differenzierbare Kurven $I \to \mathbb{R}^3$ im $\mathbb{R}^3$. Wir definieren die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$. (Zur Erinnerung, das Kreuzprodukt von zwei Vektoren ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_1x_3 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_3 \end{pmatrix}$$

gegeben).

(a) Wie berechnet sich die Ableitung von γ am Punkt t (durch die Werte von α, $\dot\alpha$, β und $\dot\beta$)?

(b) Ist die Kurve γ stetig differenzierbar?

Lösung:

1. Das Kreuzprodukt ist bilinear. Eine Verallgemeinerung von Aufgabe G3 führt zu $\dot\gamma = \alpha \times \dot\beta + \dot\alpha \times \beta$. Natürlich läßt sich dies auch explizit ausrechnen.
2. Da α und β stetig differenzierbar sind, ist (nach (a) auch $\cdot\gamma$ stetig.

(A 27) Richtungsableitung (10 Punkte)

Es sei $V = C([0,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Einheitsintervall versehen mit der Supremumsnorm. Wie lautet die Richtungsableitung der Funktion $f \mapsto f^2$ in Richtung $h \in V$ am Punkt $f \in V$?

Lösung:

$\lim_{t\to 0} \frac{(f+th)^2-f^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(f^2+2tfh+t^2h^2-f^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2tfh+t^2h^2}{t} = 2f.$

(A 28) Die Richtungsableitung der Exponentialfunktion (10 Punkte)

Wir betrachten den Banachraum $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wobei wir lineare Abbildungen A mit der zugehörigen Matrix bezüglich der kanonischen Basis identifizieren. Die Matrixexponentialfunktion $\exp : V \to V$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben. Berechne die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullabbildung).

Hinweis: Dies geschieht analog zum Beweis für die reelle Exponentialfunktion.

LÖSUNG:

Es gilt

$$\exp(A) - \exp(\mathbf{0}) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} A^k - A^0 = \sum_{k=1} \frac{1}{k!} A^k.$$

Somit folgt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\exp(tA) - \exp(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{k=1} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = \lim_{t \to 0} A + \frac{\sum_{k=2} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = A.$$