Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 18. Juni 2007

Mathe II

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Taylorpolynome und Taylorreihen

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils die Taylorpolynome vom Grad 0 bis 3 mit Entwicklungspunkt 1 und, falls möglich, die entsprechenden Taylorreihen. In welchen offenen Umgebungen von 1 konvergieren die Taylorreihen, falls sie existieren, gegen die jeweilige Funktion f_i?

(a) $f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ (b) $f_2(x) = \sin(\pi x)$ (c) $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ (x-1)^4 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$

Lösung:

(a) Wir rechnen wie folgt:

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4, \text{ also } f_1(1) = 3 \text{ und } T^0_{f_1}(x,1) = 3.$$
$$f_1'(x) = 6x^2 - 6x + 8, \text{ also } f_1'(1) = 8 \text{ und } T^1_{f_1}(x,1) = 8(x-1) + 3.$$
$$f_1''(x) = 12x - 6, \text{ also } f_1''(1) = 6 \text{ und } T^2_{f_1}(x,1) = \frac{6}{2}(x-1)^2 + 8(x-1) + 3.$$
$$f_1'''(x) = 12, \text{ also } f_1'''(1) = 12 \text{ und } T^3_{f_1}(x,1) = \frac{12}{6}(x-1)^3 + \frac{6}{2}(x-1)^2 + 8(x-1) + 3.$$

Alle weiteren Ableitungen von f_1 existieren, sind nämlich 0. Daher existiert die Taylorreihe von f_1 mit Entwicklungspunkt 1 und ist mit $T^3_{f_1}(x,1)$ identisch. Beachte, dass $T^3_{f_1}(x,1)$ mit f_1 auf ganz $\mathbb{R}$ identisch ist, was man entweder durch das Auflösen der Klammern und Zusammenfassen sieht oder durch die Tatsache, dass das Taylorpolynom einer Funktion vom Grade 3 mit Entwicklungspunkt 1 das eindeutige Polynom vom Grade kleiner gleich 3 ist, das mit der Funktion im Funktionswert und bis im 3. Ableitungswert in 1 übereinstimmt und dass f_1 diese Bedingung auch erfüllt und vom Grade kleiner gleich 3 ist.

(b) Wir rechnen wie folgt:

$$f_2(x) = \sin(\pi x), \text{ also } f_2(1) = 0 \text{ und } T^0_{f_2}(x,1) = 0.$$
$$f_2'(x) = \pi\cos(\pi x), \text{ also } f_2'(1) = -\pi \text{ und } T^1_{f_2}(x,1) = -\pi(x-1).$$
$$f_2''(x) = -\pi^2\sin(\pi x), \text{ also } f_2''(1) = 0 \text{ und } T^2_{f_2}(x,1) = -\pi(x-1).$$
$$f_2'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x), \text{ also } f_2'''(1) = \pi^3 \text{ und } T^3_{f_2}(x,1) = \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 - \pi(x-1).$$

Ferner haben wir $f_2^{(2n)}(x) = 0$ und $f_2^{(2n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $n \geq 2$. Somit existiert die Taylorreihe von f_2 mit Entwicklungspunkt 1 und lautet

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-1)^m, \text{ wobei } a_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 2n \\ \frac{(-1)^{n+1}\pi^m}{m!} & \text{für } m = 2n+1. \end{cases}$$

Da Taylorreihen immer Potenzreihen sind, ist der Bereich, in dem die Taylorreihe konvergiert, ein Konvergenzkreis. In diesem Fall hat dieser den Mittelpunkt 1 und wegen[1]

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{\pi^m}{m!}} = \frac{\pi}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m!}} = 0$$

ist der Konvergenzradius ∞ und somit konvergiert die Taylorreihe von f_2 in ganz $\mathbb{R}$..

(c) Bei zusammengesetzten Funktionen muss man sicherstellen, dass der rechtsseitige Funktionswert und die rechtsseitigen Ableitungswerte gleich den entsprechenden linksseitigen sind. Linksseitig ist der Funktionswert und sind die Ableitungswerte in 1 offensichtlich 0. Rechtsseitig ist dies nicht ganz so offensichtlich, aber es gilt tatsächlich:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^4 = 0, \quad \lim_{x\to 1} 4(x-1)^3 = 0, \quad \lim_{x\to 1} 12(x-1)^2 = 0, \quad \lim_{x\to 1} 24(x-1) = 0.$$

Somit ist f_3 in 1 dreimal differenzierbar und man hat

$$T^0_{f_3}(x,1) = T^1_{f_3}(x,1) = T^2_{f_3}(x,1) = T^3_{f_3}(x,1) = 0.$$

Es ist allerdings $\lim_{x\to 1} 24 = 24 \neq 0$, somit stimmt die vierte rechtsseitige Ableitung nicht mit der linksseitigen überein und daher ist f_3 nicht viermal differenzierbar in 1, also existiert keine Taylorreihe von f_3 mit Entwicklungspunkt 1. (Dafür müsste die Funktion beliebig oft differenzierbar sein.)

(G 2) Reelle und komplexe Fourierkoeffizienten

Sei

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

ein reelles Fourierpolynom. Finden Sie seine komplexe Darstellung, d.h. finden Sie $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, N, -N\}$ mit

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

Zusatzfrage: Sei S_N eine N-te Fourier-Partialsumme für vorgegebenes $N \in \mathbb{N}$. Wie viele Nullstellen in $[-\pi, \pi)$ hat S_N höchstens, wenn nicht alle a_k, b_k null sind?

Hinweis: Es gelten $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ und $e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$. Wie kann man aus diesen Informationen den Sinus und den Kosinus zurückgewinnen?

LÖSUNG:

[1] Wir benutzen hier ohne Beweis, dass $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m!} = \infty$.

Es sind $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ und $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, also hat man für $k > 0$:

$$a_k \cos(kx) = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \text{und} \quad b_k \sin(kx) = b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

und daher

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$, ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

für $k > 0$.

Zur Zusatzfrage: Wir werden zeigen, dass ein von null verschiedenes S_N höchstens $2N$ verschiedene Nullstellen in $[-\pi, \pi)$ hat. Wir schreiben zunächst

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k z^k = \frac{1}{z^N} \sum_{k=0}^{2N} c_{k-N} \cdot z^k$$

für $z := e^{ix}$.

Angenommen, S_N hätte $2N + 1$ *verschiedene* Nullstellen in $[-\pi, \pi)$. Dann würden diese Nullstellen durch die Funktion $x \mapsto e^{ix}$ auf $2N + 1$ *verschiedene* Nullstellen des Polynoms $\sum_{k=0}^{2N} c_{k-N} \cdot z^k$ abgebildet. Weil dieses letztgenannte Polynom aber vom Grad $\leq 2N$ ist und nicht-konstante Polynome vom Grade $\leq 2N$ stets höchstens $2N$ verschiedene Nullstellen haben, muss $\sum_{k=0}^{2N} c_{k-N} \cdot z^k = 0$ sein, also jedes $c_{k-N} = 0$, mithin $S_N = 0$. Somit hat ein von null verschiedenes S_N höchstens $2N$ verschiedene Nullstellen in $[-\pi, \pi)$.

(G 3) Berechnung einiger Fourierreihen

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden 2π-periodischen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, berechnen Sie ihre reellen und komplexen Fourierkoeffizienten und stellen Sie jeweils die reelle und die komplexe Fourierreihe auf:

(a) $f_1(x) := x$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(b) $f_2(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \pi] \\ -x & \text{für } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$

(c) $f_3(x) := \dfrac{x^2}{4}$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

Hinweis: Die Formeln für die reellen Fourierkoeffizienten sind $a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Die komplexen Koeffizienten erhalten Sie durch $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ für $k \in \mathbb{Z}$ oder mithilfe der reellen Koeffizienten und **(G 2)**.

LÖSUNG:

(a) Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ haben wir:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx \right) \\ &= 0 - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) = -\frac{1}{k^2\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \sin(t)\, dt = -\frac{1}{k^2\pi} \left(-\cos(k\pi) + \cos(-k\pi) \right) = 0. \end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\pi\cdot\frac{-\cos(k\pi)}{k} + \pi\cdot\frac{-\cos(k(-\pi))}{k}\right) + \frac{1}{k^2}\int_{-k\pi}^{k\pi}\cos(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi\cdot\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2}\left(\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right)\right) \\
&= \frac{-2\cos(k\pi)}{k} + 0 = \begin{cases} -\frac{2}{k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{2}{k} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bei den komplexen Koeffizienten stellen wir fest:

$$
c_0 = \frac{a_0}{2} = 0 \quad \text{und für } k > 0\text{:} \quad c_k = -\frac{ib_k}{2} = \begin{cases} \frac{i}{k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{i}{k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases}
$$

$$
c_{-k} = \frac{ib_k}{2} = \begin{cases} -\frac{i}{k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{i}{k} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}
$$

Wir haben also die Fourierreihen

$$
2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\cdot(-1)^k}{k}e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\cdot(-1)^{k+1}}{k}e^{-ikx}.
$$

(b) Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin(kx)\,dx + \int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} t\sin(kt)\,dt + \int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.
$$

Für $k = 1, 2, \ldots$ haben wir:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} -x\cos(k(-x))\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx\right) = 0 - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx \\
&= -\frac{2}{k^2\pi}\int_0^{k\pi}\sin(t)\,dt = -\frac{2}{k^2\pi}\left(-\cos(k\pi) + \cos(0)\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bei den komplexen Koeffizienten stellen wir fest:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und für } k > 0\text{:} \quad c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} == \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{2}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir haben also die Fourierreihen

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}\cos((2\ell+1)x) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} e^{i(2\ell+1)x}.$$

(c) Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \frac{x^2}{4}\sin(kx)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\sin(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} \frac{t^2}{4}\sin(kt)\,dt + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\sin(kx)\,dx\right) = 0. \end{aligned}$$

Es ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \frac{x^2}{4}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Für $k = 1, 2, \ldots$ haben wir:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \frac{x^2}{4}\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} -\frac{x^2}{4}\cos(k(-x))\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} 2x\sin(kx)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(0 - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{k\pi}\left(\left(\pi\cdot\frac{-\cos(k\pi)}{k} - 0\right) + \frac{1}{k^2}\int_0^{k\pi}\cos(t)\,dt\right) \\ &= \frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^3\pi}\left(\sin(k\pi) - \sin(0)\right) = \frac{\cos(k\pi)}{k^2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bei den komplexen Koeffizienten stellen wir fest:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{und für } k > 0\text{:} \quad c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2k^2} & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{2k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir haben also die Fourierreihen

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx) \quad \text{und} \quad \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}e^{ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}e^{-ikx}.$$

(G 4) Konvergenz von Fourierreihen

Betrachten Sie die Fourierreihen der Funktionen f_1, f_2, f_3 aus Aufgabe **(G 3)** hinsichtlich ihrer Konvergenz: An welchen Stellen und nach welchem Satz konvergieren die Fourierreihen jeweils? Betrachten Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktionen gesondert und bestimmen Sie dort auf zwei Arten und Weisen, ob die Fourierreihen konvergieren und wenn ja, mit welchen Grenzwerten.

LÖSUNG:

Jede dieser 2π-periodischen Funktionen ist derart, dass sich das Intervall $[-\pi, \pi]$ jeweils in endliche viele Stücke zerlegen lässt, so dass die Funktion dort stetig und monoton ist: f_1 ist auf ganz $[-\pi, \pi]$ stetig und monoton und f_2, f_3 sind beide stetig und monoton auf $[-\pi, 0]$ und $[0, \pi]$. Außerdem sind f_2, f_3 auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und in den Unstetigkeitsstellen $(2\ell+1)\pi$ von f_1, wobei $\ell \in \mathbb{Z}$, existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\lim_{x \nearrow (2\ell+1)\pi} f_1(x) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow (2\ell+1)\pi} f_1(x) = -\pi.$$

Somit konvergieren nach dem Satz von Dirichlet die Fourierreihen von f_1, f_2, f_3 überall. Nach Dirichlet konvergiert die Fourierreihe von f_1 an einer Unstetigkeitsstelle $(2\ell + 1)\pi$ gegen

$$\frac{\lim_{x \nearrow (2\ell+1)\pi} f_1(x) + \lim_{x \searrow (2\ell+1)\pi} f_1(x)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$$

Wir können uns die Fourierreihe von f_1 aber auch direkt in $(2\ell + 1)\pi$ anschauen:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k(2\ell + 1)\pi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot 0 = 0.$$

Hausübungen

(A 23) Konvergenz einer Fourierreihe (10 Punkte)

Sei $d_0, d_1, d_{-1}, d_2, d_{-2}, \ldots$ eine Folge komplexer Zahlen. Man definiere auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit $S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$ eine Funktionenfolge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, also die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$. Wir nehmen nun weiter an, dass diese *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ konvergiere. Beantworten Sie (mit Begründung!) folgende Fragen:

(a) Ist f notwendigerweise stetig?

(b) Stimmt die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$ mit der Fourierreihe von f überein, d.h. gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

wobei $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ für alle $k \in \mathbb{Z}$?

(c) Ist die Konvergenz von $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ gegen f auch eine Konvergenz im normierten Vektorraum $(C^0([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$, d.h. gilt auch

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x) - f(x)|^2\, dx} = 0?$$

LÖSUNG:

(a) Jede Partialsumme S_N ist eine endliche Summe von Vielfachen von Exponentialfunktionen, also eine stetige Funktion. Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen immer stetig ist, ist f stetig.

(b) Da $S_N \to f$ für $N \to \infty$ ein gleichmäßiger Limes ist, vertauscht dieser Limes mit Integralen. Es gilt daher für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty} S_N(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-N}^{N}\left(d_\ell e^{i\ell x}e^{-ikx}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left(d_\ell e^{i\ell x}e^{-ikx}\right)dx \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d_\ell \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x}\,dx}_{=1 \text{ für } \ell=k \text{ und sonst } 0} = d_k.
\end{aligned}$$

Somit sind die c_k tatsächlich die Fourierkoeffiziente von f.

(c) Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass für jedes $\delta > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $N \geq m$ gilt:

$$\|S_N - f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_N - f| \leq \delta.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass obige Ungleichung mit $\delta := \varepsilon^2/2\pi$ für alle $N \geq m$ gilt. Dann gilt aber auch für alle $N \geq m$:

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x) - f(x)|^2\,dx} \leq \sqrt{2\pi \cdot \|S_N(x) - f(x)\|_\infty^2\,dx} \leq \sqrt{2\pi\cdot\varepsilon^2/2\pi} = \varepsilon.$$

Also ist $S_N \to f$ für $N \to \infty$ auch ein Limes im Raum $(C^0([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$.

(A 24) Integrale von Sinus- und Kosinus-Funktionen (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx$$

für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Denken Sie an die komplexe Darstellung des Sinus und des Kosinus.

LÖSUNG:

Wegen $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(kx)\sin(\ell x) &= \frac{\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)\cdot\left(e^{i\ell x} - e^{-i\ell x}\right)}{-4} \\
&= \frac{1}{4}\left(-e^{i(k+\ell)x} - e^{-i(k+\ell)x} + e^{i(k-\ell)x} + e^{-i(k-\ell)x}\right).
\end{aligned}$$

Daher haben wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx &= -\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=-k \text{ und sonst } 0} -\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=-k \text{ und sonst } 0} \\ &\quad +\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=k \text{ und sonst } 0} +\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=k \text{ und sonst } 0} \\ &= \begin{cases} -\pi & \text{für } \ell=-k \\ \pi & \text{für } \ell = k \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Wegen $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos(kx)\cos(\ell x) &= \frac{\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)\cdot\left(e^{i\ell x}+e^{-i\ell x}\right)}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(k+\ell)x}+e^{-i(k+\ell)x}+e^{i(k-\ell)x}+e^{-i(k-\ell)x}\right).\end{aligned}$$

Daher haben wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx &= \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=-k \text{ und sonst } 0} +\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=-k \text{ und sonst } 0} \\ &\quad +\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=k \text{ und sonst } 0} +\frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-\ell)x}\,dx}_{=2\pi \text{ für } \ell=k \text{ und sonst } 0} \\ &= \begin{cases} \pi & \text{für } \ell=\pm k \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

(A 25) Reihe über den reziproken Quadratzahlen (10 Punkte)

Wir wollen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

berechnen[2] und gehen in drei Schritten vor.

(a) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x\in[0,\pi] \\ -1 & \text{für } x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Wenden Sie nun *Parsevals Gleichung*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$$

an, um $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{8}{(2j+1)^2\pi^2}$ und danach $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}$ zu berechnen.

[2]Diese Reihe ist einige der wenigen Reihen, von denen man *auswendig* wissen sollte, dass sie konvergieren.

(c) Wir schreiben $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Begründen Sie, warum

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{S}{4}$$

gilt. Folgern Sie nun $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

LÖSUNG:

(a) Wir berechnen die komplexen Koeffizienten direkt:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -1\, dx + \int_{0}^{\pi} 1\, dx \right) \\ &= (-0 - (-(-\pi))) + (\pi - 0) = 0 \end{aligned}$$

und, für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{\pi} e^{-ikx}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{1 - e^{ik\pi}}{ik} \right) + \left(\frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 - e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} \right) = \frac{1}{ik\pi} - \frac{e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{2ik\pi} = \frac{1}{ik\pi} - \frac{1}{ik\pi} \frac{e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{ik\pi} (1 - \cos(k\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{2}{ik\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Für die linke Seite von Parsevals Gleichung gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

Die rechte Seite ergibt mit (a):

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= 0^2 + \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{2}{ik\pi} \cdot \frac{2}{-ik\pi} = \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{k^2\pi^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)^2\pi^2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(-2j-1)^2\pi^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{(2j+1)^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{(2j+1)^2\pi^2} = 1$ und daher $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(c) Mit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n>0 \text{ gerade}} \frac{1}{n^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{S}{4}. \end{aligned}$$

Nach (b) ist also $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$, also $\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$, mithin $S = \frac{\pi^2}{6}$.