Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 13. Juni 2007

Mathe II
7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Offene/Abgeschlossene und kompakte Mengen

Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

(a) $\mathbb{N}$ (b) $[0,1)$ (c) $\bigcup_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k},1)$ (d) $M=\{(-1)^n\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

LÖSUNG:

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, da das Komplement $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ offen ist. Die durch $a_n=n$ gegeben Folge hat keine konvergente Teilfolge, somit ist $\mathbb{N}$ nicht kompakt.

(b) Dieses Intervall ist weder offen (da 0 kein innerer Punkt ist) noch abgeschlossen (da 1 ein Häufungspunkt ist, der nicht zur Menge gehört). Damit ist die Menge auch nicht kompakt.

(c) Diese Menge ist, da sie Vereinigung von offenen Mengen ist auch wieder offen. Da sie den Häufungspunkt 1 (und auch den Häufungspunkt 0) nicht enthält, ist sie nicht abgeschlossen und damit auch nicht kompakt.

(d) M ist abgeschlossen. Der einzige Häufungspunkt ist 0 und ist enthalten in M.

Wir zeigen, daß es keinen anderen Häufungspunkt als 0 gibt. Ist $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq 0$, dann gilt $|x|\geq\frac{1}{n}$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann enthält

$$(x-\frac{1}{(2n)^2},x+\frac{1}{(2n)^2})\cap M$$

höchstens ein Element von M. Somit ist x kein Häufungspunkt von M.

Da die Menge M beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie kompakt. Da M viele isolierte Punkte enthält, ist diese Menge nicht offen, da diese Punkte keine inneren Punkte sind.

(G 2) Ein unendlichdimensionaler Banachraum

Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel auf dem unendlichdimensionalemn Banachraum $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

LÖSUNG:

Wir suchen uns eine Folge (in der Einheitskugel), die keine konvergente Teilfolge besitzt. Sei o.B.d.A. $[a,b]=[0,1]$. Wir setzen

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{für } x<\frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die einzelnen Funktionen f_n sind alle stetig und es gilt $\|f_n\| = 1$, also $f_n \in B_1(0)$. Aber: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergigert nicht gleichmäßig. Zwar konvergiert f_n punktweise, jedoch gegen die unstetige Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit kann $(f_n)_n$ keine konvergente Teilfolge haben.

(G 3) Potenzreihen

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$. (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2} z^n$, $x \in \mathbb{C}$.

Für welche Werte sind die Reihen konvergent, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind sie gleichmäßig konvergent? Mache Sie sich jeweils klar, um welche Funktionenfolge es sich dabei handelt.

LÖSUNG:

(a) Zunächst beobachten wir, dass gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$. Wir können nun den Konvergenzradius ρ mit dem Quotientenkriterium für Reihen bestimmen.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n \cdot 2^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)2^n x^n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot |x|.$$

Damit die Reihe für ein x konvergiert, muss gelten $\lim_{n\to infty} \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot |x| = 2 \cdot |x| < 1$ (siehe Quotientenkriterium). Da für $|x| < \frac{1}{2}$ also die Reihe konvergiert, vermuten wir nun $\rho = \frac{1}{2}$. Da die Reihe für $|x| > \frac{1}{2}$ offensichtlich divergiert (warum?), folgt, daß $\rho = \frac{1}{2}$ tatsächlich der Konvergenzradius ist. Nun betrachten wir noch die Fälle $|x| = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$: Da die Reihe für $x = \frac{1}{2}$ die harmonische Reihe ist, divergiert die Reihe.

$x = -\frac{1}{2}$: Da die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$ die alternierende harmonische Reihe ist, konvergiert sie.

Insbesondere folgt daraus, daß die Funktionenfolge $g_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}(2x)^n$ für alle $x < \frac{1}{2}$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

(b) Wir gehen vor wie bei a):

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \cdot |x-2|.$$

Gesucht sind also alle x mit $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-2| < 1$, und damit konvergiert die Reihe für alle $x \in]1,3[$. Sie divergiert für alle $x > 3$ und alle $x < 1$. Für $x \in \{1,3\}$ sehen wir, daß beide zugehörigen Reihen konvergent sind, die Reihe konverhiert also für alle $x \in [1,3]$, und konverhiert auf diesem Bereich auch gleichmäßig nach Weierstraß, da $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{(x-2)^n}{n^2}\|_{[1,3]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(c) Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+i)^n}\right| \cdot |z| = \sqrt{2} \cdot \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \cdot |z|,$$

wenn also gelten muß $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{2} \cdot |z| < 1$ für Konvergenz, dann ergibt sich $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{(1+i)^n}{n^2} z^n\|_{|z| \le \frac{1}{\sqrt{2}}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ konvergiert die Reihe, also die Funktionenfolge

$g_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{(1+i)^n}{n^2} z^n$ sogar absolut und gleichmäßig nach Weierstraß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(G 4) Konvergenz von Funktionenfolgen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D := D(f_n) = [0,1]$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2^n x & \text{, falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{, falls } \frac{1}{2^n} < x \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Skizzieren Sie f_1 und f_2 sowie qualitativ f_n und untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hinsichtlich punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz auf D.

LÖSUNG:

Skizze:

Vermutung: Aufgrund obiger Skizze liegt die Annahme nahe, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall D punktweise (aber nicht gleichmäßig) gegen die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0,1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 0 \\ 0 & \text{, falls } x \in (0,1] \end{cases}$$

konvergiert.

Punktweise Konvergenz: Zum Nachweis der punktweisen Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die (vermutete) Grenzfunktion f sollen nun zwei Fälle unterschieden werden:

$x = 0$: In diesem Fall gilt

$$f_n(0) = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir erhalten

$$\lim_{n \to \infty} f_n(0) = 1 = f(0).$$

$x \in (0,1]$: Wir müssen zeigen, daß für jedes $x \in (0,1]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq N$ die Beziehung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für ein vorgegebenes $x \in (0,1]$ existiert wegen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{2^N} < x,$$

weshalb für alle $n \geq N$ dann

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < x$$

und somit

$$|f_n(x) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

folgt.

Damit haben wir bewiesen, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0,1]$ *punktweise* gegen die Grenzfunktion f konvergiert.

Gleichmäßige Konvergenz: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist die Funktion f_n stetig. Wäre nun die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent, so müßte die Grenzfunktion f ebenfalls stetig sein. Da aber die Funktion f an der Stelle $x_0=0$ (und damit auf D) *nicht* stetig ist, folgt, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

(G 5) Taylorentwicklung

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)=\ln x$ um den Punkt 1 und deren Konvergenzradius.

LÖSUNG:

Die Ableitungen sind durch $f^n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ gegeben. Die Koeffizienten a_n der Taylorreihe berechnen sich somit zu

$$a_n=\frac{1}{n!}f^n(1)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Die Taylorentwicklung lautet demnach $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

Hausübungen

(A 20) Potenzreihen (10 Punkte)

(a) Wir definieren $\binom{\lambda}{k}:=\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}$ für beliebige $\lambda\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty}\binom{\lambda}{k}z^k$. Hängt R von N ab?

(b) Es sei $\varphi(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda}{k}z^k$. Beweisen Sie $\varphi(z)=(1+z)^{\lambda}$.

Hinweis: Benutzen Sie $(1+z)\varphi'(z)=\lambda\varphi(z)$ und betrachten Sie die Funktion $\frac{(1+z)^{\lambda}}{\varphi(z)}$.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(z):=\frac{1}{1+z^2}$ im Nullpunkt.

(d) Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung des Arcustangens arctan um den Nullpunkt.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Ableitung des Arcustangens und benutzen Sie Teilaufgabe (c).

LÖSUNG:

(a) Es gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\lambda}{n}}{\binom{\lambda}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\lambda-n}\right|=1$. Der Konvergenzradius hängt somit nicht von N ab. Dies folgt u.a. auch daraus, daß die Anfangsglieder einer Reihe deren Konvergenz nicht beeinflussen.

(b) Aus dem Hinweis folgt $\varphi'(z)=\lambda\varphi(z)(1+z)^{-1}$. Es folgt $\frac{d}{dz}\frac{(1+z)^{\lambda}}{\varphi(z)}=0$. Der Quotient ist somit eine konstante Funktion. Aus $(1+0)^{\lambda}=1=\varphi(0)$ ergibt sich damit die Gleichheit der Funktionen im Zähler und im Nenner.

(c) Auf der Einheitskugel gilt $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$. Somit ergeben sich die Koeffizienten der Taylorreihe zu

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^n & \text{für} \quad n\in 2\mathbb{Z}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

(d) Aus $\arctan'(z)=f(z)$ ergibt sich $\arctan(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ auf der Einheitskugel.

(A 21) Potenzreihen (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(k+\sin(k))(x-2)^k$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k}$ (d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$.

LÖSUNG:

(a) Es ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k+\sin(k)}{k+1+\sin(k+1)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{\sin(k)}{k}}{1+\frac{1}{k}+\frac{\sin(k+1)}{k}}\right|$.

$$\text{Da } -\tfrac{1}{k} \le \tfrac{\sin(k)}{k} \le \tfrac{1}{k}, \text{ gilt } \lim_{k\to\infty}\tfrac{\sin(k+1)}{k} = \lim_{k\to\infty}\tfrac{\sin(k)}{k} = 0,$$
$$\text{und damit } \lim_{k\to\infty}\left|\tfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \tfrac{1+0}{1+0+0} = 1.$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 1.

(b) Es ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)\cdot 2}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{4k+2}{k+1} = 4.$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 4.

(c) Mit $z=(x-5)^5$ schreibt sich die gegebene Reihe als $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}z^k$.
Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

ist dieser $\frac{1}{2}$ nach dem Wurzelkriterium. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle $x\in\mathbb{R}$ mit

$$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

(d) Es ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2k}\cdot\frac{2k+1}{(-1)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist also 1 nach dem Quotientenkriterium.

(A 22) (10 Punkte)

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to R, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{fr} \quad x>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an. Beweisen Sie, daß diese Funktion beliebig oft differenzierbar ist und berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt 0.

LÖSUNG:

Da die konstante 0-Funktion und die Exponentialfunktion beliebig oft differenzierbar sind, ist nur die Differenzierbarkeit der Funktion f im Punkt 0 zu beweisen. Anhand der Skizze vermuten wir $f'(0) = 0$. Da die Exponentialfunktion schneller fällt als jedes Polynom, folgt

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{-1}{h^2}} - 0}{h} \leq \lim_{h \to 0} \| \frac{e^{-\frac{-1}{h}} - 0}{h} = 0.$$

Somit ist die Funktion f in 0 Differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. Analog beweisen wir die Existenz der höheren Ableitungen. Die Funktion f ist auf dem Intervall $[-\infty, 0)$ beliebig oft differenzierbar mit Ableitung 0. Auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist sie auch beliebig oft differenzierbar. Die 1. Ableitung berechnet sich hier zu $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$. Weiteres Ableiten ergibt immer eine summe des Typs $\sum f \cdot p_i$ mit Polynomen p_i in $\frac{1}{x}$. Auch hier gilt

$$0 \leq \left| \lim_{h \to 0} \frac{f^n(h) - 0}{h} \right| = \left| \lim_{h \to 0} \frac{\sum_i f(h) \cdot p_i(h) - 0}{h} \right| \leq \sum_i \left| \lim_{h \to 0} \frac{f(h) \cdot p_i(h) - 0}{h} \right| \leq 0.$$

somit ist die Funktion f im Punkt 0 beliebig oft Differenzierbar und die Ableitungen verschwinden in 0:$f^n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Taylorreihe ist somit die Nullfunktion.