Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

Mathe II

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Konvergenz

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im normierten Raum V und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konvergiert auch die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$?

(b) Es sei sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Raum V mit konvergenter Teilfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Konvergiert dann auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

LÖSUNG:

(a) Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert, gibt es einen Punkt $x \in V$ (den Grenzwert), so daß folgendes gilt: Für alle $\epsilon > 0$ exisiert ein N_ϵ mit $\|x_n - x\| < \epsilon$ für alle $n > N_\epsilon$. Dies gilt auch für $n_k > N_\epsilon$. Somit exisiert ein $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_k > N_\epsilon$ für alle $k > K_\epsilon$. Es folgt $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon$ für alle $k > K_\epsilon$, d.h. die Teilfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch gegen x.

(b) Nein, wie das Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$ mit der Teilfolge x_{2n} zeigt.

(G 2) Normen

Es sei $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ gegebene **p-Norm** ($p \geq 1$). Für $p = \infty$ setzt man $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$.

(a) Skizziere die Einheitskugeln bezüglich der 1-Norm, der 2-Norm und der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Beweisen Sie, daß die obigen 3 Normen äquivalent sind.

LÖSUNG:

(a)

(b) Es gilt $\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \|\vec{x}\|_\infty^p} \leq \sqrt[p]{n}\|\vec{x}\|_\infty$ und $\|\vec{x}\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ bzw. $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p$. Somit sind alle p-Normen zur Maximumsnorm äquivalent. Insbesondere sind damit auch alle p-Normen äquivalent.

(G 3)

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_n x^n$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Konvergiert die Reihe punktweise auf dem Intervall $[0, 1]$? Konvergiert sie dort gleichmäßig?

(c) Konvergiert die Reihe punktweise auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$? Konvergiert sie dort gleichmäßig?

LÖSUNG:

(a) $R = 1$.

(b) Da die Reihe für $x = 1$ divergiert, konvergiert sie auf dem Intervall $[0, 1]$ weder punktweise noch gleichmäßig.

(c) Die geometrische Reihe hat auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ als Grenzwert. Da die Reihe für $x = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ absolut konvergiert, Es gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} x^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Da die Reihe für $x = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ absolut konvergiert, konvergiert sie auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ sogar gleichmäßig (und somit auch punktweise).

(G 4) Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Bestimmen Sie für die Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bezüglich punktweiser Konvergenz und entscheiden Sie, ob sie gleichmäßig konvergieren:

(a) $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$ (b) $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j$

LÖSUNG:

(a) Der punktweise Limes der Funktionenfolge $(f_n)_n$ kann wie folgt bestimmt werden:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Als Grenzwert erhalten wir also die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Nun schätzen wir den Abstand von $|f_k(x) - f(x)|$ unabhängig von x von oben ab und zeigen so, daß die Folge auch gleichmäßig gegen f konvergiert:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2}) \cdot (\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}{(\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}\right| \\
&= \left|\frac{x^2 + \frac{1}{k} - x^2}{(\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}\right| \leq \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, daß es ein N gibt, so daß $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k > N$. Da aber $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$, existiert ein N mit $\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$, also gilt $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k > N$.

(b) Der Grenzwert der zweiten Folge entspricht gerade der Exponentialfunktion:

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j = e^x.$$

Diese Folge ist nicht gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$. Wieder betrachten wir $|g_k(x) - g(x)|$, nur schätzen wir es diesmal von unten ab: Sei $x > 0$. Dann gilt

$$|e^x - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j| = |\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j| = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \geq \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Für $x = \sqrt[k+1]{(k+1)!}$ gilt also $|e^x - h_k(x)| \geq 1$, d.h. für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein $k \in \mathbb{N}$ so daß $|e^x - h_k(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(G 5) Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} x - n & \text{falls} \quad n \leq x \leq n+1 \\ n + 2 - x & \text{falls} \quad n+1 \leq x \leq n+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die ersten Folgeglieder.

(b) Konvergiert die Folge f_n punktweise oder sogar gleichmäßig?

LÖSUNG:

(a)

(b) Die Folge konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $N > x$; es folgt $f_k(x) = 0$ für alle $k > N$. Da $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $\|0\|_\infty = 0$ gilt, kann die Folge f_n nicht gegen die Nullfolge konvergieren.

Hausübungen

(A 17) Funktionenräume (10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so daß $a < b$ gilt. Auf dem Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$ definieren wir eine Abbildung $\|\cdot\|_\infty : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

(a) Warum existiert das Supremum in obiger Definition?

(b) Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist.

(c) Es sei P die Menge aller Polynomfunktionen auf $[a,b]$. Ist P ein Untervektorraum von $C([a,b],\mathbb{R})$?

(d) Beweisen Sie, daß die Einschränkung $\exp|_{[a,b]}$ nicht in P liegt.

(e) Ist P abgeschlossen in $C([a,b],\mathbb{R})$?

Hinweis: Benutze (d)

LÖSUNG:

(a) Weil stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten (=kompakten) Mengen ihr Maximum annehmen. Man hätte hier also auch max statt sup schreiben dürfen.

(b) Siehe Vorlesung Analysis I.

(c) Ja, natürlich.

(d) Da es für jedes Polynom f eine höhere Ableitung $f^{n)}$ gibt, welche die Nullfunktion ist, aber $\exp' = \exp$ gilt, kann die Exponentialfunktion auf keinem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ mit einem Polynom übereinstimmen.

(e) Da $\exp|_{[a,b]}$ ein Grenzwert einer Folge von Polynomfunktionen (nämlich der Partialsummen) ist, welcher nicht in P liegt, kann P nicht abgeschlossen sein.

(A 18) (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^n \cdot (x-2)^n \ .$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad , \ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

LÖSUNG:

(a) (i) Berechnung des Konvergenzradius R:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n 2^n|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2$$

Wir erhalten $R = \frac{1}{2}$.

(ii) Aus Aufgabenteil (i) folgt, daß die Potenzreihe für $x \in (2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2})$ konvergiert. Untersuchung der Randstelle $x = 1.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (1.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

existiert nicht.
Randstelle $x = 2.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (2.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

existiert nicht.
Fazit: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x \in (1.5, 2.5)$.

(b) Für $x < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1$ (geometrische Reihe). Für $x = 1$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot (1-1) = 0$. Die Reihe konvergiert demnach punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig ist. (vgl. Satz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen.)

(A 19) Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ mit } f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in (-1,1)$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $\lambda \in (0,1)$ die Konvergenz auf dem Intervall $[-\lambda, \lambda]$ sogar gleichmäßig ist.

LÖSUNG:

(a) Wir untersuchen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ mit dem Wurzelkriterium auf Konvergenz; betrachten also $a_n = \sqrt[n]{\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right|}$.

<u>1.Fall</u>: $x = 0 \quad \Rightarrow a_n = 0 \to 0 \qquad (n \to \infty)$

<u>2.Fall</u>: $x \neq 0 \quad \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{|x|}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{|x|}\,\sqrt[n]{n}} \to |x| \qquad (n \to \infty)$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 1$ für alle $x \in (-1, 1)$, also die Reihe konvergent.

(b) Sei $\lambda \in (0, 1)$. Für alle $x \in [-\lambda, \lambda]$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n}$$

und diese Summe ist nach (a) konvergent. Also konvergiert die Reihe auf $[-\lambda, \lambda]$ gleichmäßig.