Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 4. Juni 2007

Mathe II

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Spiegelungen

Es sei g die Gerade durch den Ursprung, die mit der positiven x-Achse im $\mathbb{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn den Winkel $\gamma \in [0, 2\pi]$ einschließt und $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalspiegelung an der Geraden g.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von g.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatix $[\sigma_g]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}$ zur Abbildung σ_g.

LÖSUNG:

(a) Die Menge $\left\{\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}\right\}$ ist z.B. eine Orthonormalbasis für g.

(b) Die Basis aus Aufgabe a) läßt sich durch den Vektor $\begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$ zu einer ON-Basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}\right\}$ ergänzen. In dieser Basis wird die Spiegelung durch die Matrix $[\sigma_g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Darstellungsmatrix $[\sigma_g]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}$ ergibt sich dadurch zu

$$\begin{aligned}
[\sigma_g]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_2}[\sigma_g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[\mathrm{id}^{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cos^2\gamma - \sin^2\gamma & 2\cos\gamma\sin\gamma \\ \cos\gamma\sin\gamma & -cos^2\gamma + \sin^2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) \\ \sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus den Additionssätzen für Sinus und Cosinus.

(G 2)

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von u und v aufgespannten Ebene,

(b) Projektion auf die von u und v aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von v erzeugt wird.

LÖSUNG:

Es sei E die von u und v aufgespannte Ebene.

(a) Da alle Vektoren aus E durch die Spiegelung nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Spiegelung auf ihr negatives abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und $E^\perp$ ist der zugehörige Eigenraum.

(b) Da alle Vektoren aus E durch die Projektion nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Projektion auf den Nullvektor abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert 0 und $E^\perp$ ist der zugehörige Eigenraum.

(c) Sei G die von v erzeugte Gerade. Da alle Vektoren auf der Drehachse durch die Drehung nicht verändert werden sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und G der zugehörige Eigenraum.

Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ der Drehwinkel.

Für $\alpha = 0$ handelt es sich um die Identität. Folglich sind alle Vektoren Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und $\mathbb{R}^3$ der zugehörige Eigenraum.

Für $\alpha = \pi$ handelt es sich um eine Spiegelung an der Geraden. Folglich sind alle Vektoren, die senkrecht zu G sind, Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und $G^\perp$ der zugehörige Eigenraum.

Für alle anderen α gibt es keine Eigenvektoren außerhalb der Drehachse.

(G 3)

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiterhin sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung A^* (,d.h. es gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$). Beweisen Sie Ker $A = (\text{Im } A^*)^\perp$ und Im $A = (\text{Ker } A^*)^\perp$.

Lösung:

Nach Vorraussetzung gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$. Somit folgt

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker } A &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle A(v), w \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle v, A^*(w) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in (\text{Im } A^*)^\perp. \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichheit erhält man

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \text{Im } (A^*)^* \\ &= \left[(\text{Im } (A^*)^*)^\perp \right]^\perp \\ &= [\text{Ker } (A^*)]^\perp . \end{aligned}$$

(G 4) Direkte Summen/Eigenräume

Es sei $A : V \to V$ eine diagonalisierbare $\mathbb{K}$-lineare Selbstabbildung des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Beweisen Sie, daß die Summe der eigenräume

$$\sum_{\lambda\,\text{istEigenwertvonA}} \text{Eig}(A, \lambda)$$

direkt ist und daß $V = \oplus_\lambda \text{Eig}(A, \lambda)$ gilt.

Lösung:

Die Summe ist genau dann nicht direkt, wenn der Nullvektor eine nichttriviale Linearkombination von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist:

$$0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

Wir beweisen die Unmglichkeit dieser Darstellung durch Induktion ber n. Der Fall $n = 2$ ist bekannt, die Summe von zwei Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten ist immer direkt. Wir nehmen nun an, die direkte Summe aus n Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten sei immer direkt und es gäbe $n+1$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ zu n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_{n+1} = 0.$$

Durch Anwenden der Linearen Abbildung A erhält man die Gleichung

$$\lambda_1 c_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} c_n v_n = 0.$$

Zieht man von dieser Gleichung das $\lambda_{n+1} - fache$ der 1. Gleichung ab, so ergibt sich die Gleichung

$$(\lambda_1 \lambda_{n+1}) c_1 v_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n+1}) c_n v_n = 0.$$

Nach Induktionsvorraussetzung ist müssen die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ verschwinden, es folgt somit auch $c_{n+1} = 0$. Somit ist die Summe aus $n + 1$ Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten auch immer direkt.

Weil die Abbildung nach Vorraussetzung diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, daher ist die Summe $\oplus_\lambda \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ der ganze Vektorraum V.

(G 5) Quadriken

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1, 1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1, 1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0, -4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T A C y + b^T C y + c = 0$$

bzw.

$$y^T C^T A C y + b^T C y + c = 0$$

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe G**??**.

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Linearglied $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} &= y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} \\ &= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skizze siehe Abbildung .

Hausübungen

(A 13) Quadriken (10 Punkte)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$

Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle λ_i ungleich Null sind?

Lösung:

Es sei zunächst $n = 2$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0.$$

Für den Fall, daß $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ gilt, ist der Punkt $(0, 0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ (bzw. $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$) definiere $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$ und $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{x_2^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_2 = \pm\frac{b}{a} x_1. \end{aligned}$$

Folglich besteht die Quadrik Q aus zwei Geraden mit der Steigung $\pm\frac{b}{a}$. Dies sind gerade die Asymptoten, der Hyperbeln, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.

Sei nun $n = 3$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0.$$

Für den Fall, daß alle λ_i das gleiche Vorzeichen besitzen, ist der Punkt $(0,0,0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall, daß die λ_i unterschiedliche Vorzeichen besitzen, betrachten wir den Fall $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und $\lambda_3 < 0$ und definieren $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$, $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$ und $c := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}$. (Die übrigen Fälle können durch Umnummerierung auf diesen zurückgeführt werden.) Dann gilt

$$\begin{aligned}
& & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} &= \frac{x_3^2}{c^2} \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}} &= \frac{|x_3|}{c}
\end{aligned}$$

Folglich ist die Quadrik Q ein Doppelkegel mit elliptischer Grundfläche. Es ist genau der asymptotische Kegel, der Hyperboloide, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.

(A 14) Signatur (10 Punkte)

Berechnen Sie die Signatur der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & -2i & 0 \\ i & 2 & 1 & 0 \\ 2i & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

Durch Subtraktion des i-fachen der 1. Zeile von der 3. Zeile und Subtraktion des $(-i)$-fachen der 1. Spalte von der 3. Spalte erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $-1, 1, 1$ und 3. Somit hat A die Signatur $(3, 1)$.

(A 15) (10 Punkte)

Es seien $A, B : V \to V$ diagonalisierbare $\mathcal{K}$-lineare Selbstabbildungen des $\mathcal{K}$-Vektorraumes V.

(a) Ist $A \circ B$ diagonalisierbar

(b) Ist $A \circ B$ im Falle $A \circ B = B \circ A$ diagonalisierbar?

LÖSUNG:

(a) Nein, ein Gegenbeispiel ist z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Ja, denn Eigenräume $\mathrm{Eig}(B, \lambda)$ von B sind invariant unter A:

$$\forall v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda) : A(B(v)) = B(A(v)) = B(\lambda v) = \lambda(B(v)) \Rightarrow \forall v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda) : B(v) \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$$

Da die Summe $V = \sum_\lambda \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ direkt ist und $B(\mathrm{Eig}(A, \lambda)) \subset \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ gilt, reicht es die Behauptung für die Vektorräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ zu beweisen. Hier gilt jedoch $A_{|\mathrm{Eig}(A,\lambda)} = \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Eig}(A,\lambda)}$. Somit genügt es den Fall $A = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ zu betrachten. In diesem Fall ist jedoch jede Basis aus Eigenvektoren von B auch eine Basis aus Eigenvektoren von A, d.h. A und B sind simultan diagonalisierbar.