Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23. Mai 2007

Mathe II

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Basen

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Bei welchen handelt es sich um ein Erzeugendensystem und bei welchen um eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

LÖSUNG:

Die Vektoren der Menge U sind linear abhängig, da der erste die Summe der beiden anderen ist. Folglich ist U keine Basis. Da die Dimension von $\text{lin}(U)$ zwei ist, kann U kein Erzeugendensystem des dreidimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sein.

Die Vektoren der Menge V sind offensichtlich linear unabhängig. Daher hat $\text{lin}(V)$ die Dimension drei und folglich muß $\text{lin}(V) = \mathbb{R}^3$ gelten. Somit ist V sowohl ein Erzeugendensystem als auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Vier Vektoren aus einem dreidimensionalen Vektorraum sind immer linear abhängig. Folglich ist die Menge W keine Basis. Da $V \subset W$ und V ein Erzeugendensystem ist, ist auch W eines.

(G 2)

Berechne eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des durch $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ mit
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ definierten Skalarprodukts.

LÖSUNG:

Man geht von der Standardbasis aus und berechnet zunächst die Norm von e_1. Es ist $|e_1|^2 = e_1^T Ae_1 = (1\,0\,-2)e_1 = 1$, also $v_1 = e_1$. Weiterhin ist e_2 orthogonal zu e_1 und ebenfalls normiert, also $v_2 = e_2$. Es ist

$$u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Es bleibt u_3 zu normieren und auch hier erhält man $v_3 = u_3$, also als Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, (2, 0, 1)^T\}$.

(G 3) Determinanten und Basiswechsel

Die lineare Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_3$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}$ und vergleichen Sie sie mit $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}$. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

LÖSUNG:

(a) $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} = 6$.

(b) Der Basiswechsel wird durch die Matrix

$$S = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

beschrieben. Es folgt $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{B}} \cdot [L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_3} = S^{-1} \cdot [L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} \cdot S$. Es ist zunächst die Inverse von S zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot [L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Determinante ähnlicher Matrizen ist gleich.

(G 4)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

Es ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & (\lambda-3)(3-\lambda)+1 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2) \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2+6\lambda-8 \\ -1 & 2\lambda-4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)(2\lambda-4-\lambda^2+6\lambda-8) \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-6). \end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 2$ berechnen sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = 6$ berechnen sich ebenso:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

(G 5)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

LÖSUNG:

(a)

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(2-\lambda)+2(2-\lambda)) + 2\cdot(-3(2-\lambda)+3(2-\lambda))$$
$$= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).$$

Also ist $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A-\lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1,2,3$. Zu beachten ist noch, daß der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(c) Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hausübungen

(A 10) Basen (10 Punkte)

Für $a = 2$ und $a = -2$ betrachte man die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie in beiden Fällen die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Im Fall $a = 2$ besitzt A Eigenvektoren, die eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden, d.h. jeweils Länge 1 haben und aufeinander senkrecht stehen. Bestimmen Sie eine solche Basis und verifizieren Sie, daß für die Matrix $U = (u_1, u_2, u_3)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind. (Beachten Sie, daß Matrizen, deren Spaltenvektoren Länge 1 haben und aufeinander senkrecht stehen, orthogonale Matrizen sind, d.h. daß $U^{-1} = U^T$ gilt.)

(c) Gibt es auch im Fall $a = -2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Lösung:

(a) Es ist

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a-2 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 3) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 4) = (a-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Damit sind die Eigenwerte: $2, -2$ und a, also haben wir in beiden Fällen die Eigenwerte 2 und -2.

(b) Wir bestimmen Eigenvektoren für $a = 2$

<u>zu $\lambda_1 = 2$:</u>

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(\sqrt{3}II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 2E) = 0$ hat also die Lösungen

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Damit sind $v_1 = (1, \sqrt{3}, 0)^T$ und $v_2 = (0, 0, 1)^T$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert 2.

<u>zu $\lambda_2 = 2$:</u>

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+I(-\sqrt{3}I)} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A+2E)x=0$ hat also die Lösungen $\lambda(\sqrt{3},-1,0)^T, \lambda \in \mathbb{R}$.
Damit ist $v_3 = (\sqrt{3},-1,0)^T$ Eigenvektor von A zum Eigenwert -2. Freundlicherweise stehen v_1, v_2, v_3 schon paarweise senkrecht aufeinander. Wir müssen nur noch normieren und erhalten:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $U^{-1} = U^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
U^{-1}AU &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Für $a=-2$ ist $\lambda = 2$ eine einfache Nullstelle von $\det(A-\lambda I)$. Der zugehörige Eigenraum ist also eindimensional. Damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren existiert muß also der Eigenraum zur doppelten Nullstelle $\lambda = -2$ zweidimensional sein. Wir bestimmen Rang$(A+2E)$ durch Spaltenumformung $II = II + (-\sqrt{3}I)$:

$$A+2E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist Rang$(A+2E)$=2, damit ist dim(Kern$(A+2E)$)=1, der Eigenraum also nur eindimensional und wir haben keine solche Basis.

(A 11) Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\det(A-\lambda E) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda-4)(1-\lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, als zugehörige Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Eine Transformationsmatrix T mit den gewünschten Eigenschaften kann nicht gebildet werden. (Nur 2 Eigenvektoren vorhanden, 3 wären aber nötig.)

(A 12) (10 Punkte)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Matrix S an, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist und berechnen Sie $S^{-1}AS$. Gibt es auch einer orthogonale solche Matrix S?

LÖSUNG:

Das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)^2(t-4)$ hat die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 2) und 4. Für letzteren findet man den (normierten) Eigenvektor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Für Eigenwert 2 hat das System $(A - tE_3)v = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen. Eine ist z.B. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Dazu sucht man nun eine weitere, orthogonale und findet z.B. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. Damit erhält man

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

und

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$