Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 15. Mai 2007

Mathe II

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Darstellungsmatrix

Es sei $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ einer reelle $m \times n$-Matrix. Durch $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ wird eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert.

(a) Die Bilder $L(\vec{e_j})$ der Basisvektoren sind Linearkombinationen $\sum_i c_j^i \vec{e}_i$ der Basisvektoren $\vec{e}_i \in \mathcal{K}_m$. Geben Sie die Koeffizienten c_j^i mit Hilfe der Matrix M an.

(b) Geben sie die Matrix $[L]_{\mathcal{K}_n}^{\mathcal{K}_m}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_m$ an.

LÖSUNG:

(a) Die sind die Spalten der Matrix M: $L(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^n m_{ij}\vec{e}_i$.

(b) Dies ist die Matrix M.

(G 2) Basiswechsel

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ zwei reelle Vektorräume. Die Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$ definieren zwei Isomorphismen $\phi_{\mathcal{K}_m} : V \to \mathbb{R}^m$ und $\phi_{\mathcal{K}_n} : W \to \mathbb{R}^n$ (vergl. Vorlesung). Weiterhin sei durch die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermöge $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ eine lineare Abbildung $L : V \to W$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$.

(b) Es seien $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ zwei weitere Basen von V bzw. W. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $T = [\phi_{\mathcal{K}_3} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{B}}$ und $S = [\phi_{\mathcal{K}_2} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}}$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

LÖSUNG:

(a) Wie in der vorigen Aufgabe folgt $[L]_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n} = M$.

(b) Diese Darstellungsmatrizen haben als Spalten genau die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$:

$$T = [\phi_{\mathcal{K}_3} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = [\phi_{\mathcal{K}_2} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

(c) Es gilt $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = S^{-1} \circ [L]_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n} \circ T$. Somit folgt

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(G 3) Vandermonde-Determinante

Die **Vandermonde Matrix** $V(x_1, \ldots, x_n)$ für ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ ist durch

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Vandermonde-Matrizen $V(x_1, x_2)$ und $V(x_1, x_2, x_3)$. Schreiben Sie das Ergebnis als Produkt von Differenzen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Vandermonde-Determinante $\det V(x_1, \ldots, x_n)$ auf und beweisen Sie diese.

Hinweis: Erzeugen Sie durch Spaltenoperationen möglichst viele Nullen in der ersten Zeile und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.

LÖSUNG:

(a) $\det V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. $\det V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(b) Wir vermuten $\det V(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j)$. Zieht man die erste Zeile von allen weiteren Zeilen ab, so erhält man

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{pmatrix}.$$

Das Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{pmatrix}.$$

Hier kann man in der k-ten Zeile den Faktor $(x_k - x_1)$ herausziehen und erhält

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i>1}(x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

(G 4)

Es sei $v, e \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $\|e\| = 1$. Weiter sei $a := \langle v, e\rangle e$ und $b := v - a$.

Zeigen Sie, daß a und b orthogonal sind, und fertigen Sie eine Skizze an. Welche geometrische Bedeutung hat das Skalarprodukt $\langle v, e\rangle$?

LÖSUNG:

Es gilt

$$\langle a, b\rangle = \langle\langle v, e\rangle e, v - a\rangle = \langle v, e\rangle\langle e, v - \langle v, e\rangle e\rangle = \langle v, e\rangle(\langle e, v\rangle - \underbrace{\langle v, e\rangle}_{=\langle e,v\rangle}\underbrace{\langle e, e\rangle}_{=1}) = 0.$$

Folglich sind a und b orthogonal.

Abbildung 1: Das Standardskalarprodukt

Aus der Skizze (siehe Abbildung 1) ist ersichtlich, daß das Skalarprodukt $\langle v, e\rangle$ gerade der Anteil von v in Richtung e ist. Damit ist auch leicht nachvollziehbar, warum das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren funktioniert.

(G 5)

Führe das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}-1\\10\\0\\4\end{pmatrix}$$

aus.

Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?

LÖSUNG:

Mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}}\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}-1 & 10 & 0 & 4\end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{20}{3} + \tfrac{8}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{20}{3} + \tfrac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T \\
&= 0
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt erhält man den Nullvektor, womit der Algorithmus nicht fortgesetzt werden kann, da die nachfolgende Normierung nicht möglich ist. Die Ursache des Problems ist, daß (b_1, b_2, b_3) nicht linear unabhängig sind ($b_3 = 2b_1 - 3b_2$), was aber Voraussetzung für das Orthonormalisierungsverfahren ist.

LÖSUNG:

(a)

Hausübungen

(A 7) (10 Punkte)

Konstruieren Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{C}^3$, in der der Vektor $(1-i, 1+i, 2i)^T$ vorkommt.

LÖSUNG:

Man muß sich zunächst klarmachen, daß man zwar nichtnormierte Vektoren sucht, im Gram-Schmidt-Verfahren die Normierungskonstanten aber benötigt. Sei $b_1 = (1-i, 1+i, 2i)^T$ durch e_2, e_3 zu einer Basis von $\mathbb{C}^3$ ergänzt. Es ist $v_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} b_1$. Daher erhält man

$$u_2 = e_2 - \frac{1}{8}\langle b_1, e_2\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}(1-i)\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2i \\ 6 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Sei $h_2 = (2i, 6, -2-2i)^T$. Dann ist $|h_2|^2 = 48$ und man erhält im nächsten Schritt

$$u_3 = e_3 - \frac{1}{8}\langle b_1, e_3\rangle b_1 - \frac{1}{48}\langle h_2, e_3\rangle h_2 = \frac{1}{48}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix} + 12i\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix} - (2i-2)\begin{pmatrix} 2i \\ 6 \\ -2-2i \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 16+16i \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als einfachste Orthogonalbasis entnimmt man aus dieser Rechnung

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ -1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(A 8) Determinanten (8 Punkte)

Für $n \geq 2$ berechne man

$$f(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

(die Matrix sei in $\mathbb{R}^{n\times n}$) und gebe $f(0)$ sowie alle Nullstellen von f an.

LÖSUNG:

Zur Berechnung der Determinante wird zunächst die letzte Zeile von jeder Zeile subtrahiert, anschließend werden alle Spalten zur letzte Spalte addiert. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-x \\ 0 & x-1 & \dots & 0 & 0 & 1-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & x+(n-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, ergibt sich die Determinante als Produkt der Hauptdiagonaleinträge. (Dies sieht man z.B. durch rekursives Entwickeln nach jeweils der 1. Zeile.) Es gilt also:

$$f(x) = (x-1)^{n-1} \cdot (x + (n-1)).$$

Die einzigen Nullstellen von f sind 1 und $1-n$. Ferner ist $f(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$.

(A 9) (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, daß V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

(d) Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei Vektoren, so daß

$$L(v) = \lambda v \qquad L(w) = \mu w \qquad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \neq \mu$$

Bilden die Vektoren v, w immer eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\det B = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$

also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) Um die Kerne zu bestimmen, erhält man mit Gauss–Jordan-Elimination

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man $v_1 = \binom{2}{1}$ und $v_2 = \binom{3}{2}$ wählen. v_1 und v_2 sind linear unabhängig, daher ist $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$. Also ist V die direkte Summe von V_1 und V_2.

(c) Die Übergangsmatrix von der Standardbasis zur Basis B' ist

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet man die gesuchte Matrix A' als

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Ja, da Eigenvektoren zu verschiedenen EW immer linear unabhängig sind.