Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 10. Mai 2007

Mathe II

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Basiswechsel

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Standardbasis $\mathcal{K}_2$ (auch kanonische Basis genannt), die Basis $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie den Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, der durch die Matrix

$$[\phi]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2} := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Bestimme $[\phi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(b) Gegeben seien weiterhin Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ durch $[v]_{\mathcal{K}_2} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $[w]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $[v]_{\mathcal{B}}$ und $[w]_{\mathcal{K}_2}$ sowie $[\phi(v)]_{\mathcal{B}}$ und $[\phi(w)]_{\mathcal{K}_2}$.

LÖSUNG:

(a) Um bei einem Basiswechsel die neuen Darstellungen von Vektoren und Matrizen berechnen zu können, benötigen wir die entsprechenden Transformationsmatrizen. Dazu drücken wir als Erstes die Vektoren einer der beiden Basen durch die Vektoren der anderen aus. Hierbei können wir uns entscheiden, welche der beiden Basen wir durch die andere ausdrücken. Am leichtesten fällt die Entscheidung, wenn eine der beiden Basen eine kanonische ist, dann lassen sich die Vektoren der anderen Basis nämlich ganz einfach durch die kanonischen Basisvektoren ausdrücken. In unseren Fall erhalten wir so die Transformationsmatrix

$$S = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = S^{-1}$ erhalten wir

$$[\phi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2} \cdot [\phi]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}} = S^{-1}[\phi]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}S.$$

Für die Inverse zu S erhalten wir (etwa mittels Gauß-Jordan-Elimination)

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$[\phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{K}_2} = S^{-1}[v]_{\mathcal{K}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$[w]_{\mathcal{K}_2} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_2}[w]_{\mathcal{B}} = S[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

sowie

$$[\phi(v)]_{\mathcal{B}} = [\phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$[\phi(w)]_{\mathcal{K}_2} = [\phi]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}[v]_{\mathcal{K}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(G 2) Skalarprodukt/Hermitesche Form

(a) Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die folgende Gleichheit:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2.$$

(b) Es sei V ein unitärer Vektorraum. Beweisen Sie die folgende Gleichheit:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2 - \frac{i}{4}||x+iy||^2 + \frac{i}{4}||x-iy||^2.$$

LÖSUNG:

(a) Man benutze die Symmetrie des Skalarprodukts und erhält:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2 \\ = \ & \frac{1}{4}(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) - \frac{1}{4}(\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) \\ = \ & \langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

(b) Man ziehe den Skalar i aus dem Skalarprodukt heraus und beachte dabei die Konjugationsregeln:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2 - \frac{i}{4}||x+iy||^2 + \frac{i}{4}||x-iy||^2 \\ = \ & \frac{1}{4}(\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) \\ & +\frac{1}{4}(-\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle) \\ & +\frac{1}{4}(-i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - i\langle y,y\rangle) \\ & +\frac{1}{4}(i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + i\langle y,y\rangle) \\ = \ & \langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

(G 3) Orthonormalisierung

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, daß der Vektor $v = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil a konstruierten Basis dar.

Lösung:

(a) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T - \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T - \left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Um nachzuweisen, daß v in $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt, berechnen wir den Anteil von v der nicht in $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt:

$$v - \langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - \langle v, v_3\rangle v_3 = v - 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0 \tag{1}$$

Da der Anteil von v außerhalb von $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ verschwindet, liegt v in $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ und aus Gleichung 1 ergibt sich sofort die gesuchte Linearkombination:

$$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3.$$

(G 4)

Berechnen Sie für jede reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

1. durch Spalten- und Zeilenumformungen.

2. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.
3. mit der Regel von Sarrus (falls möglich).

Lösung:

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A) = 0$, da die erste und die zweite Zeile identisch sind (*vgl. Satz 11.2 b) und d)*).

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b & 0 & 0 & 1+b \\ 0 & 1+b & 1+b & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1+b & 1 & 0 \\ 0 & 1+b & b & 0 \\ 1+b & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

Das gilt nach Satz 11.1 d) und die nächste Umformung nach Satz 11.1 b):

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert:

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix}$$

Nochmal nach der ersten Spalte entwickeln:

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} b-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{vmatrix} = (1+b)^2(b-1)^2$$

2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot 4 + 2 \cdot (2-1) - 3 \cdot (-2) = -8 + 2 + 6 = 0$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}$$
$$= b^2(b^2-1) - (b^2-1) = (b^2-1)^2 = ((b+1)(b-1))^2 = (1+b)^2(1-b)^2$$

3. Mit der Regel von Sarrus ist nur die Berechnung von det(A) möglich:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 6 - 2 - 8 = 0$$

Hausübungen

(A 4) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^T A)$ der Raum $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ der reellen $m \times n$-Matrizen mit einem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet wird.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Einheitsmatrix E_2 und der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

(a) Seien $A, B, C \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. zur Bilinearität: Da $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ und $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$, folgt

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B, C\rangle &= \operatorname{tr}(C^T(\lambda A + B)) \\ &= \operatorname{tr}(C^T(\lambda A) + C^T B) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(C^T A) + \operatorname{tr}(C^T B) \\ &= \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle. \end{aligned}$$

2. zur Symmetrie: Da $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$ und $(A^T B)^T = B^T A^{T^T} = B^T A$, folgt

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(A^T B) = \langle B, A\rangle.$$

3. zur positiven Definitheit: Es ist

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{lk}^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $A = 0$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} ||E_2|| &= \sqrt{\langle E_2, E_2\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(E_2^T E_2)} = \sqrt{2}, \\ ||A|| &= \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{30}, \end{aligned}$$

also ist

$$\cos\alpha = \frac{\langle E_2, A\rangle}{||E_2|| \cdot ||A||} = \frac{5}{\sqrt{60}}.$$

Damit erhalten wir den Winkel $\alpha = 49{,}8^\circ$ (gerundet).

(A 5) (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 q(x)q(x)\,dx$$

.

Hinweis: Sie können mit der Basis $1, x, x^2$ beginnen.

LÖSUNG:

Wir führen das Gram-Schmidt Verfahren mit der Basis $1, x, x^2$ durch:

1. Da wegen $< 1, 1 >= 1$ das konstante Polynom 1 schon die Norm 1 hat, kann man dieses als ersten Basisvektor v_1 wählen.
2. Aus $< 1, x >= \frac{1}{2}$ folgt $v_2 = \frac{x-\frac{1}{2}}{\|x-\frac{1}{2}\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$.
3. Aus $< 1, x^2 >= \frac{1}{3}$ und $< \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), x^2 >= \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ folgt $v_3 = \frac{x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\|x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\|} = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$.

(A 6) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: E

s gilt

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$$

und mit Beispiel (4) auf S.46 a.a.O. ergibt sich

$$\begin{aligned} \det B = & \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ & = 3 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) + 9 \cdot 7 \cdot 3 - 9 \cdot 5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot 0 \\ & = 0 - 16 + 189 + 180 - 18 - 0 \\ & = 335. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Determinante der Matrix C ist es nach den Bemerkungen (6) und (7) auf S.48 a.a.O. sinnvoll, wenn zunächst die Gestalt der Matrix mittels elementarer Umformungen so verändert wird, daß möglichst viele Elemente einer Zeile (oder Spalte) den Wert Null annehmen:

	3	7	8	9
	4	3	1	4
	6	8	8	9
	0	2	3	7
Z3 + (-1) · Z1	3	7	8	9
	4	3	1	4
	3	1	0	0
	0	2	3	7
S1 + (-3) · S2	- 18	7	8	9
	- 5	3	1	4
	0	1	0	0
	- 6	2	3	7

Die Determinante der Matrix

$$C' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 8 & 9 \\ -\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\ 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

stimmt mit der Determinante von C überein. Eine *Entwicklung nach der dritten Zeile* von C' ergibt

$$\det C = \det C' = \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{3+\nu} \cdot \widetilde{C}'_{3\nu} \cdot c'_{3\nu}.$$

Wegen

$$c'_{31} = c'_{33} = c'_{34} = 0 \quad \text{und} \quad c'_{32} = 1 \neq 0$$

erhält man mit dem Minor

$$\begin{aligned} \widetilde{C}'_{32} = \begin{vmatrix} -18 & 8 & 9 \\ -5 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 7 \end{vmatrix} &= (-18) \cdot 1 \cdot 7 + (-5) \cdot 3 \cdot 9 + (-6) \cdot 8 \cdot 4 \\ &\quad - (-6) \cdot 1 \cdot 9 - (-18) \cdot 3 \cdot 4 - (-5) \cdot 8 \cdot 7 \\ &= -126 - 135 - 192 + 54 + 216 + 280 \\ &= 97 \end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned} \det C &= \det C' \\ &= \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{3+\nu} \cdot \widetilde{C}'_{3\nu} \cdot c'_{3\nu} \\ &= (-1)^{3+2} \cdot \widetilde{C}'_{32} \cdot c'_{32} \\ &= (-1)^5 \cdot 97 \cdot 1 \\ &= -97. \end{aligned}$$