**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 13. Juni 2007

# Mathe II

## 1. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1)**

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$

(b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (2y, x+y)^T$

(c) $f: C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ mit $(f(u))(x) = u'(x)$

*Kommentar zur Notation*: $C^1(\mathbb{R}))$ steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

LÖSUNG:

(a) Es ist $f(1,1) = 1$, $f(2,2) = 4$.
Wäre $f$ linear, müsste aber $f(2,2) = f(2\cdot(1,1)) = 2\cdot f(1,1) = 2$ gelten, also ist $f$ nicht linear.

(b) Für alle $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,x_2)+\mu(y_1,y_2)) &= f(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2) \\ &= (2\lambda x_2+2\mu y_2, \lambda x_1+\mu y_1+\lambda x_2+\mu y_2)^T \\ &= (2\lambda x_2, \lambda(x_1+x_2))^T + (2\mu y_2, \mu(y_1+y_2))^T \\ &= \lambda f(x_1,x_2)+\mu f(y_1,y_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ ist linear

(c) Für alle $u,v \in C^1(\mathbb{R})$ und alle $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(\lambda u+\mu v))(x) &= (\lambda u+\mu v)'(x) = \lambda u'(x)+\mu v'(x) \\ &= \lambda(f(u))(x)+\mu(f(v))(x) \end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$,
also gilt $f(\lambda u+\mu v) = \lambda f(u)+\mu f(v)$ als Funktion.
Damit ist $f$ linear.

**(G 2)**

Skizzieren Sie die Mengen $\mathbb{R}\cdot\mathbf{e}_1$, $\mathbb{R}\cdot\mathbf{e}_2$, $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x_1\le 1 \text{ und } 0\le x_2\le 1\}$ und $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$ sowie ihre Bilder unter den folgenden linearen Abbildungen:

(a) $f_1(x_1,x_2) = (5x_1, 5x_2)$ (b) $f_2(x_1,x_2) = (7x_1, x_2)$ (c) $f_3(x_1,x_2) = (x_1, x_1+x_2)$

**(G 3)**

Es sei $\mathbb{R}[x]_3$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller rellen Polynome höchstens dritten Grades.

(a) Ist die Ableitung $p \mapsto p'$ eine lieare Abbildung auf $\mathbb{R}[x]_3$? (Beweis!)

(b) Geben sie für die 2-fache Ableitung $p \mapsto p''$ die beschreibende Matrix bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ an.

LÖSUNG:

(a) Das Ableiten erniedrigt den Grad eines Polynoms. Daher ist die Ableitung eine Selbstabbildung des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]_3$. Weiterhin gilt $(p+q)' = p' + q'$ sowie $(\lambda p)' = \lambda p'$ für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]_3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist die Ableitung linear.

(b) Es gilt $1'' = (x)' = 0$, $(x^2)'' = 2$ und $(x^3)'' = 6x$. Die Matrix der 2-fachen Ableitung bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ ist somit durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

**(G 4)**

Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $\phi((1,-1)^T) = (1,0)^T$ und $\phi((1,2)^T) = (0,1)^T$ gegeben. Berechnen Sie $\phi((2,1)^T)$ sowie den Vektor $v$ mit $\phi(v) = (2,1)^T$.

LÖSUNG:

Es gilt: $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = v_2 + v_1$. Aus der Linearität von $\varphi$ folgt

$$\varphi(v_3) = \varphi(v_2 + v_1) = \varphi(v_2) + \varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt ebenfalls wegen der Linearität von $\varphi$:

$$\begin{aligned} \varphi(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(2v_1 + v_2) \\ \Rightarrow \quad v = 2v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**(G 5)**

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h. ermitteln Sie diejenige Matrix $A_\varphi$, bezüglich der

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

bestimmt. Ermitteln Sie erneut die Matrix $A_\psi$ welche die Abbildung $\psi$ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(c) Bestimmen Sie die zu $\psi \circ \varphi$ gehörige Abbildungsmatrix.

LÖSUNG:

(a) Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren bereits eindeutig festgelegt. Mit

$$\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} =: a_1$$

und

$$\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} =: a_2$$

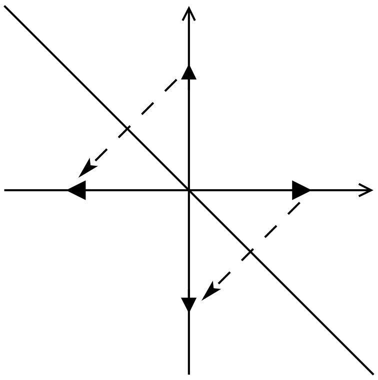
folgt

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xa_1 + ya_2 = x\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A_\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$A_\varphi := \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>Skizze:</u>



(b) Wir wollen erneut Satz 9.1 anwenden. Ist nun $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Als nächstes bestimmen wir die Bilder der Basisvektoren, wozu wir sinnvollerweise die einzigen uns bekannten Werte

$$\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

verwenden. Wegen

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

folgen mit der Linearität von $\varphi$ die Beziehungen

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \psi\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 2\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

und

$$\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \psi\left(-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = -\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$A_\psi = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}.$$

(c) Es folgt

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}.$$

## Hausübungen

**(H 1)**

Es sei $\mathbf{x} = (x,y)^T$. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f_1(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x-2\\ 3y\end{pmatrix}$ (b) $f_2(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x+y\\ y-x\end{pmatrix}$ (c) $f_3(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x-3y\\ 0\end{pmatrix}$

(d) $f_4(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x^2\\ 2y\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Matrizen bezüglich der Standardbasis zu den linearen unter den obigen Abbildung.

LÖSUNG:

Die Abbildungen $f_1$ und $f_4$ sind nicht linear. Dies folgt etwa wegen

$$f_1(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad f_4(2\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2f_4(\mathbf{e}_1).$$

Die Abbildung $f_2$ und $f_3$ sind beide linear. Dies können wir zeigen, indem wir einfach (L1) und (L2) nachrechnen, oder etwa folgendermaßen vorgehen: Für $f_2$ und $f_3$ berechnen wir

$$f_2(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad f_2(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad f_3(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad f_3(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir Matrizen

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einfaches Nachrechnen zeigt nun, dass $f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}$ sowie $f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x}$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt und aus Theorem ??? folgt dann die Linearität von $f_2$ und $f_3$.

**(H 2)**

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden in natürlicher Weise einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{1,i\}$. Zum Beispiel besitzt die komplexe Zahl $3-5i$ bezüglich der obigen Basis die Koordinaten $(3,-5)$. So läßt sich der Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto xi$, die eine komplexe Zahl mit $i$ multipliziert, die Abbildungsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zuordnen. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

$$\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto x+y \\ &f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto xy \\ &f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto \overline{x} \\ &f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto cx \end{aligned}$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{C}$ und $\overline{x} = \overline{a+bi} := a - bi$ bezeichnet die komplex Konjugierte von $x$.

Geben Sie bei den Abbildungen, die $\mathbb{R}$-linear sind, die Abbildungsmatrix (bezüglich der Standardbasis $\{1,i\}$ für $\mathbb{C}$ bzw. $\{(1,0)^T, (i,0)^T, (0,1)^T, (0,i)^T\}$ für $\mathbb{C}^2$ an.

LÖSUNG:

Die Abbildung $f_1$ ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_1(x_1+x_2, y_1+y_2) &= x_1+x_2+y_1+y_2 = x_1+y_1+x_2+y_2 = f_1(x_1,y_1) + f_1(x_2,y_2), \\ f_1(\lambda x_1, \lambda y_1) &= \lambda x_1 + \lambda y_1 = \lambda(x_1+y_1) = \lambda f_1(x_1,y_1). \end{aligned}$$

Die Vektoren $(1,0)^T$, $(i,0)^T$, $(0,1)^T$, $(0,i)^T$ sind eine Basis des $\mathbb{C}^2$. Deren Bilder sind die Spalten der Abbildungsmatrix $A_{f_1}$ von $f_1$ bezüglich dieser Basis. Daraus folgt

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $f_2$ ist nicht $\mathbb{R}$-linear, denn für $x = 1$, $y = 1$ und $\lambda = 2$ gilt

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(2,2) = 4 \neq 2 = 2f(1,1) = \lambda f(x,y).$$

Die Abbildung $f_3$ ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x = x_1 + x_2 i \in \mathbb{C}$, $y = y_1 + y_2 i \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_3(x+y) &= \overline{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)i} = (x_1+y_1) - (x_2+y_2)i = x_1 - x_2 i + y_1 - y_2 i \\ &= f_3(x) + f_3(y), \\ f_3(\lambda x) &= \overline{\lambda x_1 + \lambda x_2 i} = \lambda x_1 - \lambda x_2 i = \lambda(x_1 - x_2 i) = \lambda f_3(x). \end{aligned}$$

Die Bilder von 1 und $i$ sind 1 und $-i$. Daraus folgt für die Abbildungsmatrix $A_{f_3}$

$$A_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $f_4$ ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x,y \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_4(x+y) &= c(x+y) = cx+cy = f_4(x)+f_4(y), \\ f_4(\lambda x) &= c(\lambda x) = \lambda(cx) = \lambda f_4(x) \end{aligned}$$

Sei $c = c_1 + c_2 i$. Dann ist $f(1) = c_1 + c_2 i$ und $f(i) = -c_2 + c_1 i$. Daraus folgt für die Abbildungsmatrix $A_{f_4}$

$$A_{f_4} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

**(H 3)**

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen $\mathcal{B}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathcal{C}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sei bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$[\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die Matrix, welche $\psi$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}_3$ von $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(b) Weiterhin sei ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{\mathcal{K}_3} := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie das Bild $[\psi(v)]_{\mathcal{B}}$.

LÖSUNG:

(a) Als Transformationsmatrix in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ nehmen wir die Matrix

$$R = [\mathrm{id}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S = [\mathrm{id}]^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Matrix der Abbildung $\psi$ bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$[\psi]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}^3} = [\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}} \cdot [\psi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_3} = R[\psi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} S^{-1}$$

und wegen

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

somit

$$[\psi]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}^3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[\psi(v)]_{\mathcal{C}} = [\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{sowie} \qquad [v]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_3}[v]_{\mathcal{K}_3} = S^{-1}[v]_{\mathcal{K}_3}$$

und wir erhalten somit

$$[\psi(v)]_{\mathcal{C}} = [\psi]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}S^{-1}[v]_{\mathcal{K}_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 58 \end{pmatrix}.$$