Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 13. Juni 2007

Mathe II

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (2y, x + y)^T$

(c) $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ mit $(f(u))(x) = u'(x)$

Kommentar zur Notation: $C^1(\mathbb{R}))$ steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

(a) Es ist $f(1, 1) = 1$, $f(2, 2) = 4$.
Wäre f linear, müsste aber $f(2, 2) = f(2 \cdot (1, 1)) = 2 \cdot f(1, 1) = 2$ gelten, also ist f nicht linear.

(b) Für alle (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2)) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (2\lambda x_2 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2)^T \\ &= (2\lambda x_2, \lambda(x_1 + x_2))^T + (2\mu y_2, \mu(y_1 + y_2))^T \\ &= \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ ist linear

(c) Für alle $u, v \in C^1(\mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(\lambda u + \mu v))(x) &= (\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x) \\ &= \lambda(f(u))(x) + \mu(f(v))(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$,
also gilt $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ als Funktion.
Damit ist f linear.

(G 2)

Skizzieren Sie die Mengen $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1$, $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_2$, $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le 1 \text{ und } 0 \le x_2 \le 1\}$ und $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ sowie ihre Bilder unter den folgenden linearen Abbildungen:

(a) $f_1(x_1, x_2) = (5x_1, 5x_2)$ (b) $f_2(x_1, x_2) = (7x_1, x_2)$ (c) $f_3(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$

(G 3)

Es sei $\mathbb{R}[x]_3$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller rellen Polynome höchstens dritten Grades.

(a) Ist die Ableitung $p \mapsto p'$ eine lieare Abbildung auf $\mathbb{R}[x]_3$? (Beweis!)

(b) Geben sie für die 2-fache Ableitung $p \mapsto p''$ die beschreibende Matrix bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ an.

LÖSUNG:

(a) Das Ableiten erniedrigt den Grad eines Polynoms. Daher ist die Ableitung eine Selbstabbildung des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]_3$. Weiterhin gilt $(p+q)' = p' + q'$ sowie $(\lambda p)' = \lambda p'$ für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]_3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist die Ableitung linear.

(b) Es gilt $1'' = (x)' = 0$, $(x^2)'' = 2$ und $(x^3)'' = 6x$. Die Matrix der 2-fachen Ableitung bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ ist somit durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(G 4)

Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $\phi((1,-1)^T) = (1,0)^T$ und $\phi((1,2)^T) = (0,1)^T$ gegeben. Berechnen Sie $\phi((2,1)^T)$ sowie den Vektor v mit $\phi(v) = (2,1)^T$.

LÖSUNG:

Es gilt: $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = v_2 + v_1$. Aus der Linearität von φ folgt

$$\varphi(v_3) = \varphi(v_2 + v_1) = \varphi(v_2) + \varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt ebenfalls wegen der Linearität von φ:

$$\begin{aligned} \varphi(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(2v_1 + v_2) \\ \Rightarrow \qquad v = 2v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(G 5)

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h. ermitteln Sie diejenige Matrix A_φ, bezüglich der

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bestimmt. Ermitteln Sie erneut die Matrix A_ψ welche die Abbildung ψ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(c) Bestimmen Sie die zu $\psi \circ \varphi$ gehörige Abbildungsmatrix.

LÖSUNG:

(a) Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren bereits eindeutig festgelegt. Mit

$$\varphi(e_1) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: a_1$$

und

$$\varphi(e_2) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: a_2$$

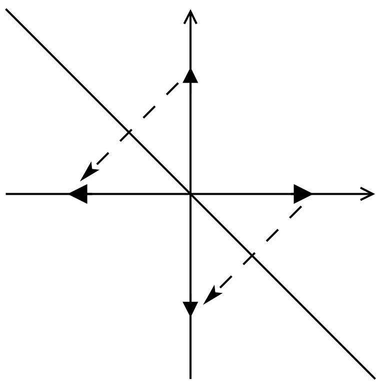
folgt

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\, a_1 + y\, a_2 = x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$A_\varphi := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Skizze:</u>



(b) Wir wollen erneut Satz 9.1 anwenden. Ist nun $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes bestimmen wir die Bilder der Basisvektoren, wozu wir sinnvollerweise die einzigen uns bekannten Werte

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verwenden. Wegen

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

folgen mit der Linearität von φ die Beziehungen

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \psi\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 2\,\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

und

$$\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \psi\left(-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = -\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\,\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\,\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$A_\psi = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}.$$

(c) Es folgt

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}.$$

Hausübungen

(H 1)

Es sei $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f_1(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x-2 \\ 3y \end{pmatrix}$ (b) $f_2(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-x \end{pmatrix}$ (c) $f_3(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $f_4(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Matrizen bezüglich der Standardbasis zu den linearen unter den obigen Abbildung.

LÖSUNG:

Die Abbildungen f_1 und f_4 sind nicht linear. Dies folgt etwa wegen

$$f_1(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad f_4(2\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2f_4(\mathbf{e}_1).$$

Die Abbildung f_2 und f_3 sind beide linear. Dies können wir zeigen, indem wir einfach (L1) und (L2) nachrechnen, oder etwa folgendermaßen vorgehen: Für f_2 und f_3 berechnen wir

$$f_2(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad f_2(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_3(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad f_3(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir Matrizen

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einfaches Nachrechnen zeigt nun, dass $f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}$ sowie $f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x}$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt und aus Theorem ??? folgt dann die Linearität von f_2 und f_3.

(H 2)

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden in natürlicher Weise einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{1, i\}$. Zum Beispiel besitzt die komplexe Zahl $3 - 5i$ bezüglich der obigen Basis die Koordinaten $(3, -5)$. So läßt sich der Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto xi$, die eine komplexe Zahl mit i multipliziert, die Abbildungsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zuordnen. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + y \\ f_2 &: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto xy \\ f_3 &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto \overline{x} \\ f_4 &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto cx \end{aligned}$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{C}$ und $\overline{x} = \overline{a + bi} := a - bi$ bezeichnet die komplex Konjugierte von x.

Geben Sie bei den Abbildungen, die $\mathbb{R}$-linear sind, die Abbildungsmatrix (bezüglich der Standardbasis $\{1, i\}$ für $\mathbb{C}$ bzw. $\{(1, 0)^T, (i, 0)^T, (0, 1)^T, (0, i)^T\}$ für $\mathbb{C}^2$ an.

Lösung:

Die Abbildung f_1 ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = f_1(x_1, y_1) + f_1(x_2, y_2), \\ f_1(\lambda x_1, \lambda y_1) &= \lambda x_1 + \lambda y_1 = \lambda(x_1 + y_1) = \lambda f_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Die Vektoren $(1, 0)^T$, $(i, 0)^T$, $(0, 1)^T$, $(0, i)^T$ sind eine Basis des $\mathbb{C}^2$. Deren Bilder sind die Spalten der Abbildungsmatrix A_{f_1} von f_1 bezüglich dieser Basis. Daraus folgt

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f_2 ist nicht $\mathbb{R}$-linear, denn für $x = 1$, $y = 1$ und $\lambda = 2$ gilt

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(2, 2) = 4 \neq 2 = 2f(1, 1) = \lambda f(x, y).$$

Die Abbildung f_3 ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x = x_1 + x_2 i \in \mathbb{C}$, $y = y_1 + y_2 i \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_3(x + y) &= \overline{(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i} = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)i = x_1 - x_2 i + y_1 - y_2 i \\ &= f_3(x) + f_3(y), \\ f_3(\lambda x) &= \overline{\lambda x_1 + \lambda x_2 i} = \lambda x_1 - \lambda x_2 i = \lambda(x_1 - x_2 i) = \lambda f_3(x). \end{aligned}$$

Die Bilder von 1 und i sind 1 und $-i$. Daraus folgt für die Abbildungsmatrix A_{f_3}

$$A_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f_4 ist $\mathbb{R}$-linear, denn für $x, y \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_4(x+y) &= c(x+y) = cx + cy = f_4(x) + f_4(y), \\ f_4(\lambda x) &= c(\lambda x) = \lambda(cx) = \lambda f_4(x) \end{aligned}$$

Sei $c = c_1 + c_2 i$. Dann ist $f(1) = c_1 + c_2 i$ und $f(i) = -c_2 + c_1 i$. Daraus folgt für die Abbildungsmatrix A_{f_4}

$$A_{f_4} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

(H 3)

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathcal{C} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sei bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die Matrix, welche ψ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}_3$ von $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(b) Weiterhin sei ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{\mathcal{K}_3} := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie das Bild $[\psi(v)]_{\mathcal{B}}$.

LÖSUNG:

(a) Als Transformationsmatrix in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ nehmen wir die Matrix

$$R = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{K}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Matrix der Abbildung ψ bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$[\psi]_{\mathcal{K}^3}^{\mathcal{K}_2} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}_2} \cdot [\psi]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{C}} = R[\psi]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} S^{-1}$$

und wegen

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

somit

$$[\psi]_{\mathcal{K}^3}^{\mathcal{K}_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$[\psi(v)]_{\mathcal{C}} = [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{sowie} \qquad [v]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{K}_3} = S^{-1}[v]_{\mathcal{K}_3}$$

und wir erhalten somit

$$[\psi(v)]_{\mathcal{C}} = [\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} S^{-1}[v]_{\mathcal{K}_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 58 \end{pmatrix}.$$