Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 10. Juli 2007

Mathe II

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Trennung der Variablen

Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL $y'(x) = y(x)^n$.

(G 2)

Wir betrachten die homogene DGL $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ mit den konstanten Koeffizienten b und c.

(a) Erraten Sie für $b = 0$ und $c = 1$ zwei unabhängige Lösungen.

(b) Lösen Sie für $b = 3$ und $c = 2$ obige DGL mit dem Ansatz $y(x) = \exp(\lambda x)$.

(c) Wie können Sie die in a) erratenen Lösungen mit dem Lösungsverfahren aus b) erhalten?

(G 3)

Finden Sie alle Lösungen der DGL $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$.

Hinweis: Sie können wie in G2 b) vorgehen.

(G 4) Wronski-Determinante

Entscheiden Sie ob und in welchen Fällen die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n sein können.

(a) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$

(b) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^5$

(c) $y_1(x) = \sin^2 x$, $y_2(x) = 2\cos^2 x$, $y_3(x) = 3$

(G 5) Variation der Konstanten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned}$$

Hinweis: Sie können die Identität $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ verwenden.

(G 6) Reduktion der Ordnung

Es soll die DGL $x^2 y'' - xy' + y = 0$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ gelöst werden.

(a) Erraten Sie eine Lösung y_1 der DGL.

(b) Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der DGL.

Hausübungen

(A 38) Zum Aufwärmen (10 Punkte)

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y' + \frac{(1+x)}{x} y = 0$, $y(1) = 1$ (b) $y' = y^2 + 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ (c) $y' + y - x^2 = 0$, $y(0) = 10$

(A 39) (10 Punkte)

Für $x > 0$ sei die Dgl.

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden. Berechnen Sie sodann die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

(A 40) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$